FLORENTIN SMARANDACHE

NOI FUNCȚII ÎN TEORIA NUMERELOR

```
η(1)  = 0
           2
η(2)  = 2    1
           1   1
η(3)  = 3    0   1
           1   0   0
η(4)  = 4    0   1   1
           1   1   1   0
η(5)  = 5    1   0   1   0
           2   1   0   0   1
η(6)  = 3    2   0   1   1   0
           4   1   1   1   1   1
η(7)  = 7    1   1   0   2   1   0
           3   0   1   3   2   1   1
η(8)  = 4    1   0   3   0   0   1   0
           2   0   4   3   2   0   1   1
η(9)  = 6    1   4   0   2   0   0   1   1
           1   4   4   1   2   0   2   0   1
η(10)= 5     5   0   1   0   0   2   1   0   1
           6   4   3   1   2   2   1   0   0   0
η(11)=11     1   3   0   2   2   1   1   0   1
           7   1   3   3   0   1   0   0   1
η(12)= 4     2   0   3   2   1   1   1   1
           9   1   0   1   1   0   1   1
η(13)=13     3   0   2   1   1   0   0
           6   1   2   0   0   0   1
η(14)= 7     4   2   2   1   1   1
           2   3   4   1   1   1
η(15)= 5     1   6   1   0   0
           1   9   5   1   1
η(16)= 6    10   1   2   1
          11  10   7   2
η(17)=17     0   8   0
          11   2   7
η(18)= 6     2   1
          13   1
η(19)=19     1
          14
η(20)= 5
```

Chișinău - 1999

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

CATEDRA DE ALGEBRĂ, LOGICĂ, ŞI TEORIA NUMERELOR

FLORENTIN SMARANDACHE

NOI FUNCŢII ÎN TEORIA NUMERELOR

Chişinău - 1999

Prof. Florentin Smarandache
University of New Mexico
Gallup, NM 87301, USA
Fax: (505) 863-7532 (Attn. Dr. Smarandache)
E-mail: smarand@unm.edu

Secţia poligrafie operativă
a U.S.M. 2009, Chişinău,
Str. A.Mateevici, 60

Cuprins:

Teoria Analitică a Numerelor reprezentă pentru mine o pasiune. Rezultatele expuse mai departe constituie rodul câtorva ani buni de cercetări şi căutări.

Lucrarea de faţă se compune din 9 articole, publicate toate prin reviste de matematică româneşti sau străine, iar unele prezentate chiar la congrese şi conferinţe naţionale cât şi internaţionale [vezi "Lista publicaţiilor autorului pe tema tezei"].

Ea se structurează în patru capitole:
- în primele trei capitole se introduc noi funcţii în teoria numerelor, se studiază proprietăţile lor, probleme nerezolvate legate de ele, implicaţii în lumea ştiinţifică internaţională (ce alţi matematicieni au abordat noţiunile acestea), conexiuni cu alte funcţii bine ştiute, importanţa rezultatelor obţinute;
- în ultimul capitol se aduc contribuţii la studierea unei funcţii cunoscute în teoria numerelor (totient sau phi a lui Euler), în principal referitoare la conjectura lui Carmichael.

[Există referinţe particulare după fiecare paragraf (articol), iar referinţe generale în finalul tezei.]

Actualitatea temei din teză este evidentă, din moment ce la Universitatea din Craiova, Conf. dr. C. Dumitrescu & Conf. dr. V. Seleacu organizează **<Prima Conferinţa Internaţională dedicată Noţiunilor de tip 'Smarandache' în Teoria Numerelor>**, şi anume: funcţii (η şi extinderi ale sale, L, funcţii prime), secvenţe, operaţii speciale, criterii de divizibilitate, teoreme, etc. de tip 'Smarandache', în perioada 21-24 August 1997
[vezi şi anunţul din "Notices of the American Mathematical Society", University of Providence, RI, SUA, Vol. 42, No. 11, rubrica "Mathematics Calendar", p. 1366, Noiembrie 1995].
Conferinţa se va desfăşura sub egida UNESCO [240]
[cf. Mircea Ichim, director, şi Lucreţia Băluţă, secretară, Filiala UNESCO din Bucureşti].

În felul acesta se deschid noi drumuri în Teoria Analitică a Numerelor, formând un domeniu aparte, care a trezit interesul diverşilor specialişti.

Un grup de cercetare privind aceste noţiuni, în special concentrat asupra Funcţiei Smarandache, s-a format la Universitatea din Craiova, România, Catedra de Matematică, condus de către Prof. dr. A. Dincă (decan), Prof. dr. V. Boju, Conf. dr. V. Seleacu, Conf. dr. C. Dumitrescu, Conf. dr. I. Bălăcenoiu, Conf. dr. Şt. Zanfir, Conf. dr. N. Rădescu, Lect. E. Rădescu, Lect. dr. I. Cojocaru, Lect. dr. Paul Popescu, Asist. drd. Marcela Popescu, Asist. N. Vîrlan, Asist. drd. Carmen Rocşoreanu, prof. S. Cojocaru, prof. L. Tuţescu, prof. E. Burton, prof. Panait Popescu, cercet. şt. M. Andrei, student Tomiţă Tiberiu Florin, şi alte cadre didactice împreună cu studenţi.
Membrii acestui grup se întâlnesc o dată pe săptămâna, în timpul anului şcolar, şi expun ultimele cercetări asupra funcţiei η,

precum şi încercări de generalizare.

În afara grupului de cercetare de la Craiova, destui matematicieni şi informaticieni străini s-au ocupat de studiului funcţiei η, cei mai activi fiind: Henry Ibstedt (Suedia), Pål Grønås (Norvegia), Jim Duncan, John C. McCarthy, John R. Sutton (Anglia), Ken Tauscher (Australia), Th. Martin (SUA), Pedro Melendez (Brazilia), M. Costewitz (Franţa), J. Rodriguez (Mexic), etc.
[Pentru o imagine mai detaliată, vezi cele 240 de "Referinţe" de la sfârşit.]

Despre însemnătatea "Funcţiei Smarandache", cum a fost botezată în revista londoneză <Personal Computer World>, Iulie 1992, p. 420, şi-a dat pentru prima dată seama scientistul englez Mike Mudge, editor al rubricii <Numbers Count> [10].
Iar valorile funcţiei, $\eta(n) = 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 4, 6, 5, 11, 4, 13, \ldots$ au fost etalate de N. J. A. Sloane & Simon Plouffe în <Encyclopedia of Integer Sequences>, Academic Press, [M0453], 1995, şi denumite "Numerele Smarandache" [140].

Articolele, notele, problemele (rezolvate sau deschise), conjecturile referitoare la această nouă funcţie în teoria numerelor sunt colectate într-o revistă specială numită "Smarandache Function Journal", publicată anual ori bianual, de Dr. R. Muller, Number Theory Publishing Co., Glendale, Arizona, SUA.

Mai mult, Ch. Ashbacher (SUA) i-a dedicat însăşi o monografie: "An introduction to the Smarandache function", Erhus Univ. Press, Vail, 1995 [194], iar Kenichiro Kashihara (Japonia) are în pregătire o altă carte despre η [235].

De asemenea, multe reviste şi chiar enciclopedii şi-au deschis paginile inserării de lucrări ce tratează, recenzează, sau citează funcţia η şi valorile ei
[vezi "Personal Computer World" (Londra), "Humanistic Mathematics Network Journal" (Harvey Mudd College, Claremont, CA, SUA), "Libertas Mathematica" (Texas State University), "Octogon" (Braşov, România), "Encyclopedia of Integer Sequences" de N. J. A. Sloane & Simon Plouffe (Academic Press; San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto; 1995), "Journal of Recreational Mathematics" (SUA), "Foaie Matematică" (Chişinău, Moldova), "The Mathematical Spectrum" (University of Sheffield, Anglia), "Elemente der Mathematik" (Elveţia), "Zentralblatt fur Mathematik" (Berlin, Germania), "The Mathematical Reviews" (Ann Arbor, SUA), "The Fibonacci Quarterly" (SUA), etc.].

Iar la conferinţe naţionale şi internaţionale organizate, de exemplu la New Mexico State University (Las Cruces, SUA), University of Arizona (Tucson), University of San Antonio (Texas), State University of New York at Farmingdale, University of Victoria (Canada), Congrès International <Henry Poincaré> (Université de Nancy, Franţa), <26th Annual Iranian Mathematics Conference> (Kerman, Iran), <The Second Asian Mathematics Conference> (Nakhon Ratchasima, Tailanda), <Programul manifestărilor organizate cu prilejul împlinirii a 100 ani de la apariţia primului număr al revistei 'Gazeta Matematică' 1895-1995> (Alba Iulia, România), etc. s-au prezentat articole ştiinţifice despre η în perioada 1991-5.

Arhive care stochează cercetările asupra funcției η (cărți, reviste, broșuri, manuscrise publicate ori inedite, articole, note, comentarii, scrisori -- obișnuite ori electronice -- de la diverși matematicieni și editori, probleme, aplicații, programe de conferințe și simpozioane, etc.), cât și asupra altor noțiuni din această teză, se gasesc la:

a) Arizona State University, Hayden Library, Colecția Specială (online) "The Florentin Smarandache papers", Tempe, AZ 85287, USA; phone: (602) 965-6515, e-mail: ICCLM@ASUACAD.BITNET, responsabile: Carol Moore & Marilyn Wurzburger;

b) Archives of American Mathematics, Center for American History SRH 2.109, University of Texas, Colecția Specială "The Florentin Smarandache papers", Austin, TX 78713, USA; phone: (512) 495-4129, fax: (512) 495-4542, director Don Carleton;

c) Biblioteca Universității din Craiova, Str. Al. I. Cuza, Nr. 13, Secția de Informare și Documentare "Florentin Smarandache" din cadrul Seminarului Matematic <Gh. Țițeica>, director O. Lohon, bibliotecară Maria Buz, fax: (051) 411688, România;

d) Arhivele Statului, Filiala Vâlcea, Fondul Special "Florentin Smarandache", responsabil: Ion Soare, Str. General Praporgescu, Nr. 32B, Rm. Vâlcea, Jud. Vâlcea, România;

care sunt puse la dispoziția publicului spre consultare.

1.1. În primul paragraf al primului capitol din teză se definește, așadar, o nouă funcție:

$\eta : Z^* \longrightarrow N,$

$\eta(n)$ este cel mai mic întreg m astfel încât m! este divizibil cu n.

Pentru calcularea lui η, construim funcțiile ajutătoare η_p, unde p este număr prim pozitiv, astfel: $\eta_p : N^* \to N^*$

$$\forall n \in N^* \quad \eta_p(a_n^{(p)}) = p^n ,$$

$$\eta_p(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_l a_{n_l}^{(p)}) = t_1 \eta_p(a_{n_1}^{(p)}) + \dots + t_l \eta_p(a_{n_l}^{(p)}) ,$$

iar $a_n^{(p)} = \dfrac{p^n - 1}{p-1}$, pentru n > 0. De unde obținem pe η:

$\forall\, n = \epsilon\, p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ cu $\epsilon = \pm 1$, p_i = prime, $p_i \neq p_j$ for $i \neq j$, $\alpha_i \geq 1$, $i = \overline{1,s}$, $\eta(n) = \max_{i=\overline{1,s}} (\eta_{p_i}(\alpha_i))$, $\eta(\pm 1) = 0$.

ea funcţie este importantă deoarece caracterizează numerele prime -- prin următoarea proprietate fundamentală:

Fie p un număr întreg > 4, atunci p este prim dacă şi numai dacă η (p) = p.

Deci, punctele fixe ale acestei funcţii sunt numere prime (la care se adaugă şi 4). Datorită acestei proprietăţi, funcţia η se foloseşte ca o sită pentru cernerea numerele prime.

Studierea şi descoperirea unor relaţii despre funcţia η duce implicit la aprofundarea cunoştinţelor despre numerelor prime, o preocupare în prezent fiind distribuirea lor.
[E. Burton încearcă generalizarea funcţiei η în corpul numerelor complexe [169].]

Totodată, funcţia η intră în conexiune şi cu foarte cunoscuta funcţie Π (x), care reprezintă numărul de numere prime mai mici decât sau egale cu x, prin următoarea formulă:

Pentru $x \geq 4$, $\Pi(x) = \sum_{k=2}^{x} /\eta(k)/k/ - 1$,

unde /b/ înseamnă partea întreagă a lui b

[vezi L. Seagull [189]].

Alte proprietăţi:

Dacă (a, b) = 1, atunci $\eta(ab) = \max\{\eta(a), \eta(b)\}$.
Pentru orice numere pozitive nenule, $\eta(ab) \leq \eta(a) + \eta(b)$.
η este o funcţie general crescătoare, adică:
$\forall a \in N$ $\exists b \in N$, $b = b(a)$, $\forall c \in N$, $c > b$, $\eta(c) > a$.

Funcţia η face obiectul multor probleme deschise, care au trezit interesul matematicienilor.
De exemplu:

a) Ecuaţia $\eta(n) = \eta(n+1)$ nu are nici o soluţie.
Nu a fost încă demonstrată, deşi I. Prodănescu [29, 92] crezuse iniţial că i-a găsit o soluţie. L. Tuţescu [30] i-a dat o extindere acestei conjecturi.
b) A. Mullin [239], inspirat de problema anterioară, conjecturează că ecuaţia $\eta(n) = \eta(n+2)$ are doar un număr finit de soluţii.
c) T. Yau [63] a propus determinarea tuturor valorilor pentru care funcţia η păstrează relaţia de recurenţă a lui Fibonacci, adică:

$$\eta(n) + \eta(n+1) = \eta(n+2),$$

neştiindu-se dacă acestea sunt în număr finit ori infinit. El însuşi aflând pe n = 9, 119. Ch. Ashbacher [182, 207] a investigat relaţia de mai sus cu un program pe calculator până la n = 1000000, descoperind valori adiţionale pentru n = 4900, 26243, 32110, 64008, 368138, 415662, dar nedemonstrând pe cazul general. H. Ibstedt [224] presupune că există o infinitate de astfel de triplete.

d) Renumitul academician, P. Erdos [147], de la Academia Ungară de Ştiinţe, solicită cititorilor revistei engleze <Mathematical Spectrum>, în care publică o scrisoare, să găsească o formulă asimptotică pentru:

$$\sum_{\substack{n < x \\ \eta(n) > P(n)}} \eta(n)^2,$$

unde P(n) reprezintă cel mai mare factor prim al lui n.

La o conferinţă internaţională, W. Sierpinski a afirmat că dacă omenirea va dura veşnic, iar problemele nerezolvate ar fi numerotate, atunci s-ar ajunge cu timpul ca toate aceste probleme să fie rezolvate.
În paragraful 1.2 ne-am propus să arătăm că putem avea o infinitate de probleme fără soluţii, astfel încât niciodată ele să nu fie rezolvate toate!
Fiecare perioadă de timp are problemele ei deschise, cărora de obicei li se dă de cap mai târziu, odată cu progresul ştiinţei.
Şi, totuşi, numărul noilor probleme nerezolvate, care apar datorită cercetărilor fireşti, creşte exponenţial, în comparaţie cu numărul vechilor probleme nerezolvate ce sunt în prezent soluţionate.
Oare, existenţa problemelor deschise constituie o criză matematică ori, dimpotrivă, absenţa lor ar însemna mai de grabă o stagnare intelectuală?

"Funcţia Smarandache" este pusă în combinaţii şi relaţii cu alte funcţii ori noţiuni din teoria numerelor şi analiză, precum: secvenţe-A, numărul de divizori, diferenţa dintre două numere prime consecutive, serii Dirichlet, funcţii generatoare, funcţia logaritm, ordin normal, condiţie Lipschitz, funcţii multiplicative ori aditive, cel mai mare factor, distribuţie uniformă, rădăcini necongruente, cardinal, triunghiul lui Pascal, secvenţă s-aditivă, suma părţilor alicuante, suma puterilor de ordin k ale părţilor alicuante, suma părţilor alicuante unitare, mediile aritmetică şi geometrică, şiruri recurente, ecuaţii şi inecuaţii diofantice, numărul de numere prime, numărul de numere prime congruente cu a modulo b, suma divizorilor, suma puterilor de ordin k ale divizorilor, suma divizorilor unitari, funcţia ϕ a lui Euler, funcţiile gamma şi beta, numărul de factori primi (cu repetiţie), numărul factorilor primi distincţi, partea întreagă, aproximaţii asimptotice, câmpuri algebrice, funcţia Mobius, funcţiile Cebîşev θ şi Ψ, etc.

Iar "Numerele Smarandache" sunt asociate şi întrepătrunse respectiv cu:
numerele abundente, aproape perfecte, amicale, amicale mărite, numerele Bell, Bernoulli, Catalan, Carmichael, deficiente, Euler, Fermat, Fibonacci, Genocchi, numerele armonice, k-hiperperfecte, Kurepa, Mersenne, m-perfecte, numerele norocoase, k-îndoite perfecte, perfecte, poligonale, piramidale, poliedrale, primitive abundente, primitive pseudoperfecte, pseudoperfecte, pseudoprime, pitagoreice, reziduri pătratice, cvasiperfecte, Stirling de ordinul I şi II, superperfecte, intangibile, numerele sinistre, numerele Ulam, etc.

În paragraful 1.3, se înfăţişează o aplicaţie a funcţiei η la rezolvarea Problemei 1270, din <Mathematics Magazine>, SUA, 1987, propusă de Prof. R. B. Eggleton de la Universitatea din Newcastle, Australia, problemă pe care o generalizăm în felul următor:

Pentru ce valori ale lui a şi n întregi nenule, $(n+h)!$ este divizibil cu a^n ?

În paragraful 1.4, η este implicată într-o ecuaţie semi-rezolvată (semi-nerezolvată!):

$\eta(mx) = x$, unde $m \in Z$ este un parametru,

iar recurenta ei, $\eta^{(i)} = \eta \circ \eta \circ \ldots \circ \eta$ de i ori, într-o frumoasă problemă de existenţă şi minim:

$\forall m \in Z-\{0, \pm 1\}\ \exists k \in N\ \eta^{(k)}(m) = \eta^{(k+1)}(m) = n_m$;
să se afle cel mai mic k cu această proprietate (rangul), precum şi n_m (n în funcţie de m).

2. În capitolul doi se defineşte altă funcţie în teoria analitică a numerelor, astfel:

$L : Z^2 \longrightarrow Z$, $L(x, m) = (x+c_1) \ldots (x+c_{\phi(m)})$,
unde $c_1, \ldots, c_{\phi(m)}$ sunt clasele de resturi modulo m, prime cu m, iar ϕ este funcţia totient a lui Euler,

care ne ajută să obţinem generalizări separate ori simultane, parţiale ori totale, ale teoremelor lui Wilson, Fermat, Euler, Gauss, Lagrange, Leibnitz, Moser, şi Sierpinski.

3. În capitolul trei se introduc următoarele funcţii, denumite prime:

Pentru $k \in N^*$, $P_k : N^k \longrightarrow \{0, 1\}$,

$$P_k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n_1, n_2, \ldots, n_k \text{ sunt toate prime;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

În continuare se determină o condiţie necesară şi suficientă (Teoremă Generală) ca n numere, coprime două câte două, să fie toate prime (în mod simultan), adică $P_k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 0$.

Fie P_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m_i$, coprime două câte două,
şi fie $r_1, \ldots, r_n, a_1, \ldots, a_n$,
numere întregi astfel încât a_i să fie coprim cu r_i pentru orice i.

Se consideră următoarele condiţii:

(i) $p_{i_1}, \ldots, p_{i m_i}$ sunt simultan prime dacă şi numai dacă

$c_i \equiv 0 \pmod{r_i}$, pentru orice i.

Atunci:

Numerele p_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m_i$, sunt simultan prime dacă şi numai dacă

$$(R/D) \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i / r_i) \equiv 0 \pmod{R/D},$$

unde $R = \prod_{i=1}^{n} r_i$, iar D este un divizor al lui R.

Această teoremă generală reuşeşte să generalizeze teoremele lui V. Popa, I. Cucurezeanu, Clement, şi S. Patrizio, etc. În plus, prin particularizarea ei, se obţin caracterizări interesante pentru numerele prime gemene, numerele prime cvadruple, etc.

Aplicaţii:

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt simultan prime dacă şi numai dacă:

$$(T) \quad \sum_{i=1}^{n} [(p_i-k_i)!(k_i-1)! - (-1)^{k_i}] \cdot \prod_{j \ne i} p_j \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_n}$$

ori

$$(V) \quad \sum_{i=1}^{n} [(p_i-k_i)!(k_i-1)! - (-1)^{k_i}] p_j / p_i \equiv 0 \pmod{p_j}$$

ori

$$(W) \quad \sum_{i=1}^{n} [(p_i-k_i)!(k_i-1)! - (-1)^{k_i}] / p_i \text{ is an integer.}$$

Iar în cazuri particulare obţinem, aşadar:

Caracterizarea numerelor prime gemene:

Numerele impare p şi p+2 sunt prime gemene dacă şi numai dacă:

$$[(p-1)! + 1] / p + [(p-1)!\, 2 + 1] / (p+2)$$

este un număr întreg.

Caracterizarea unui cvadruplu de numere prime

Numerele coprime între ele p, p+2, p+6, p+8 formează un cvadruplu de numere prime, daca și numai dacă:

$[(p-1)!+1]/p + [(p-1)!2!+1]/(p+2) + [(p-1)!6!+1]/(p+6) +$

$[(p-1)!8!+1]/(p+8)$ este număr întreg.

4. Ultimul capitol abordează funcția totient (phi) a lui Euler:

$\phi(x)$ reprezintă numărul de numere prime cu x și mai mici decât x, sau cardinalul unui sistem redus de reziduri modulo x.

În legătură cu această importantă funcție în teoria numerelor, Carmichael a emis următoarea conjectură:

$\forall n \in N$ ecuația $\phi(x) = n$ nu poate avea o singură soluție.

În paragraful 4.1 se aduc contribuții asupra conjecturii anterioare, demonstrându-se că:

$\forall n \in N$ ecuația $\phi(x) = n$ admite un număr finit de soluții; iar dacă x_0 este soluția unică, atunci ea are forma generală:

$$x_0 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2 \cdot k > 10^{10000}.$$

În paragraful 4.2 se extinde lema anterioară, arătând că:

x_0 este multiplul unui produs de foarte multe numere prime, toate elemente ale unei mulțimi recurente M, care se construiește în felul următor:

(a) elementele $2, 3 \in M$;

(b) dacă elementele distincte $2, 3, q_1, \ldots, q_r \in M$, iar $p = 1 + 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot q_1 \ldots q_r$ este prim, unde $\alpha \in \{0, 1, \ldots, 41\}$ și $\beta \in \{0, 1, \ldots, 46\}$, atunci $p \in M$; $(r > 0)$;

(c) numai elementele obținute prin aplicarea regulilor (a) sau (b) de un număr finit de ori aparțin lui M.

Se observă că rezolvarea Conjecturii lui Carmichael este echivalentă cu demonstrarea că mulțimea recurentă M este infinită (adică nu există nici un contraexemplu de soluție unică a ecuației

de mai sus).

În paragraful 4.3 se generalizează teorema clasică a lui Euler referitoare la congruențe:

Dacă $(a, m) = 1$, atunci $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$,
unde avem din nou de-a face cu funcția ϕ a lui Euler;

sub forma următoare:

Fie $a, m \in Z$, și $m \neq 0$. Atunci: $a^{\phi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod{m}$,
unde s și m_s se obțin prin procedeul de mai jos:

$$(0) \begin{cases} a = a_o d_o & ; (a_o, m_o) = 1 \\ m = m_o d_o & ; d_o \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_o = d_o^1 d_1 & ; (d_o^1, m_1) = 1 \\ m_o = m_1 d_1 & ; d_1 \neq 1 \end{cases}$$

....

$$(s-1) \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^1 d_{s-1} & ; (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1} & ; d_{s-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^1 d_s & ; (d_{s-1}^1, m_s) = 1 \\ m_{s-1} = m_s d_s & ; d_s = 1. \end{cases}$$

Se construiește și un algoritm pentru implementarea pe computer a acestei generalizări:

(1) $A := a$,
$M := m$,
$i := 0$.
(2) Calculează $d = (A, M)$ și $M' = M/d$.
(3) Dacă $d = 1$, atunci $S = i$ și $m_s = M'$; stop.
Dacă $d \neq 1$, atunci $A := d$, $M := M'$, $i := i+1$,
și mergi la pasul (2).

1. O NOUĂ FUNCŢIE ÎN TEORIA ANALITICĂ A NUMERELOR

1.1. Definiţie, construcţie, şi proprietăţi ale acestei funcţii

Abstract:

În această lucrare se construieşte o funcţie η care are următoarele proprietăţi:

(1) $\forall n \in Z \quad n \neq 0 \quad (\eta(n))! = \mathcal{M}\, n.$

(2) $\eta(n)$ este cel mai mic număr natural care are proprietatea (1).

Considerăm $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ şi $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Lema 1.1.1. $\forall\, k, p \in N^*,\ p \neq 1$, k este scris în mod unic sub forma: $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$ unde $a_{n_i}^{(p)} =$

$$= \frac{p^{n_i}-1}{p-1}, \quad i = \overline{1,\ell}, \quad n_1 > n_2 > \dots > n_\ell > 0 \text{ şi } 1 \le t_j \le$$

$\le p-1,\ j = \overline{1,\ell-1},\ 1 \le t_\ell \le p,\ n_i, t_i \in N,\quad i = \overline{1,\ell},\ \ell \in N^*.$

Demonstraţie. Şirul $(a_n^{(p)})_{n \in N^*}$ este format dintr-un număr infinit de numere naturale în ordine crescătoare, şi $a_{n+1}^{(p)} - 1 = p \cdot a_n^{(p)}$, $\forall\, n \in N^*$, p este fix,

$$a_1^{(p)} = 1,\ a_2^{(p)} = 1 + p,\ a_3^{(p)} = 1 + p + p^2, \dots$$

$$\Rightarrow N^* = \bigcup_{n \in N^*} ([a_n^{(p)}, a_{n+1}^{(p)}) \cap N^*) \quad \text{unde } [a_n^{(p)}, a_{n+1}^{(p)}) \cap$$

AMS (MOS) subject classification (1980): 10A99.

$$\cap\ [a_{n+1}^{(p)},\ a_{n+2}^{(p)}) = \emptyset$$

deoarece $a_n^{(p)} < a_{n+1}^{(p)} < a_{n+2}^{(p)}$.

Fie $k \in N^*$, $N^* = \bigcup_{n \in N^*} ([a_n^{(p)}, a_{n+1}^{(p)}) \cap N^*) \Rightarrow \exists! n_1 \in N^*$: $k \in$

$\in \left[a_{n_1}^{(p)}, a_{n_1+1}^{(p)} \right) \Rightarrow k$ este scris in mod unic

sub forma $k = \left[\dfrac{k}{a_{n_1}^{(p)}} \right] a_{n_1}^{(p)} + r_1$ (teorema împărţirii întregi).

Notăm: $\left[\dfrac{k}{a_{n_1}^{(p)}} \right] = t_1 \Rightarrow k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + r_1$, $r_1 < a_{n_1}^{(p)}$.

Dacă $r_1 = 0$, $a_{n_1}^{(p)} \leq k \leq a_{n_1+1}^{(p)} - 1 \Rightarrow 1 \leq t_1 \leq p$ şi Lema 1.1.1. este demonstrată.

Dacă $r_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\ !\ n_2 \in N^*$: $r_1 \in \left[a_{n_2}^{(p)}, a_{n_2+1}^{(p)} \right)$;

$a_{n_1}^{(p)} > r_1 \Rightarrow n_1 > n_2$, $r_1 \neq 0$ şi $a_{n_1}^{(p)} \leq k \leq a_{n_1+1}^{(p)} - 1 \Rightarrow 1 \leq t_1 \leq$

$\leq p - 1$ deoarece avem $t_1 \leq (a_{n_1+1}^{(p)} - 1 - r_1) : a_{n_1}^{(p)} < p$.

Procedeul continuă în mod similar. După un număr finit de paşi l, ajungem la $r_l = 0$ deoarece k = finit, $k \in N^*$

şi $k > r_1 > r_2 > \ldots > r_\ell = 0$ iar între 0 şi k există numai un număr finit de numere naturale distincte.

Astfel:

k se scrie în mod unic: $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + r_1$, $1 \leq t_1 \leq p - 1$,

r se scrie în mod unic: $r_1 = t_2 a_{n_2}^{(p)} + r_2$, $n_2 < n_1$,

$$1 \leq t_2 \leq p - 1,$$

⋮

r_{l-1} se scrie în mod unic: $r_{\ell-1} = t_\ell a_{n_\ell}^{(p)} + r_\ell$ şi $r_\ell = 0$,

$$n_\ell < n_{\ell-1},\ 1 \leq t_\ell \leq p,$$

=> k se scrie în mod unic sub forma: $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \ldots +$

$$+ \ldots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$$

cu $n_1 > n_2 > \ldots > n_\ell > 0$; $n_\ell > 0$ deoarece $n_\ell \in N^*$, $1 \leq t_j \leq$

$\leq p - 1$, $j = \overline{1, \ell-1}$, $1 \leq t_\ell \leq p$, $\ell \geq 1$.

Fie $k \in N^*$, $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \ldots + \bar{t}_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$ cu $a_{n_i}^{(p)} = \dfrac{p^{n_i} - 1}{p - 1}$,

$i = \overline{1,\ell}$, $\ell \geq 1$, n_i, $t_i \in N^*$, $i = \overline{1,\ell}$, $n_1 > n_2 > \ldots > n_\ell > 0$

$1 \leq t_j \leq p - 1$, $j = \overline{1,\ell-1}$, $1 \leq t_\ell \leq p$.

Construim funcţia η_p, p = prim > 0, $\eta_p: N^* \to N^*$ astfel:

$$\forall n \in N^* \quad \eta_p(a_n^{(p)}) = p^n ,$$

$$\eta_p(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \ldots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}) = t_1 \eta_p(a_{n_1}^{(p)}) + \ldots + t_\ell \eta_p(a_{n_\ell}^{(p)}) .$$

Nota 1.1.1. Funcţia η_p este bine definită pentru orice număr natural.

Demonstraţie:

Lema 1.1.2. $\forall k \in N^* - k$ se scrie în mod unic $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \ldots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$ cu condiţiile din Lema 1.1.1. $\Rightarrow \exists!$ $t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} = \eta_p(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \ldots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)})$ şi $t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} \in N^*$.

Lema 1.1.3. $\forall k \in N^*$, $\forall p \in N$, p = prime $\rightarrow k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \ldots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$ (din Lema 1.1.2) $\rightarrow \eta_p(k) = t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell}$.

Se ştie că $\left[\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b}\right] \geq \left[\frac{a_1}{b}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n}{b}\right]$, $\forall a_i, b \in N^*$, unde prin $[\alpha]$ se înţelege partea întreagă a numărului α. Arătăm că suma exponenţilor naturali ai puterilor lui p din compunerea factorialului

$$(t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell})! \text{ este } \geq k;$$

$$\left[\frac{t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell}}{p}\right] \geq \left[\frac{t_1 p^{n_1}}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p}\right] = t_1 p^{n_1 - 1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell - 1}$$

$\vdots$

$$\left[\frac{t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n}}\right] \geq \left[\frac{t_1 p^{n_1}}{p^{n_\ell}}\right] + \ldots + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_\ell}}\right] = t_1 p^{n_1 - n_\ell} + \ldots + t_\ell p^0$$

$\vdots$

$$\left[\frac{t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_1}}\right] \geq \left[\frac{t_1 p^{n_1}}{p^{n_1}}\right] + \dots + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_1}}\right] = t_1 p^0 + \dots$$

$$+ \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_1}}\right] .$$

Adunând obţinem că factorialul

sumei puterilor este $\geq t_1(p^{n_1-1} + \dots + p^0) + \dots +$

$$+ t_\ell \, (p^{n_\ell-1} + \dots + p^0) = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)} = k .$$

Teorema 1.1.1. Funcţia η_p, p = prim, definită anterior, are următoarele proprietaţi:

(1) $\forall\ k \in N^*,\ (\eta_p(k))! = M p^k$.

(2) $\eta_p(k)$ este cel mai mic număr cu proprietatea (1).

Demonstraţie:

(1) rezultă din Lema 1.1.3.

(2) $\forall\ k \in N^*,\ p \geq 2 \Rightarrow k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$

(vezi Lema 1.1.2) este scris în mod unic, unde:

$n_i,\ t_i \in N^*,\ n_1 > n_2 > \ldots > n_\ell > 0,\ a_{n_i}^{(p)} = \dfrac{p^{n_i} - 1}{p-1} \in N^*,$

$i = \overline{1,\ell}\ ,\ 1 \leq t_j \leq p - 1,\ j = \overline{1,\ell-1}\ ,\ 1 < t_\ell < p.$

$\Rightarrow \eta_p(k) = t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell}$. I note: $z = t_1 p^{n_1} +$

$+ \ldots + t_\ell p^{n_\ell}$.

Să demonstrăm că z este cel mai mic număr natural cu proprietatea (1). Presupunem prin metoda reducerii la absurd că

$$\exists\ \gamma \in N,\ \gamma < z :$$

$\gamma! = Mp^k;$

$\gamma < z \Rightarrow \gamma \leq z - 1 \Rightarrow (z - 1)! = Mp^k.$

$z - 1 = t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell\, p_\ell^{n_\ell} - 1;\ n_1 > n_2 > \ldots > n_\ell \geq 1$ şi

$n_j \in N,\ j = \overline{1,\ell}\ ;$

$\left[\dfrac{z-1}{p}\right] = t_1 p^{n_1 - 1} + \ldots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1} - 1} + t_\ell p^{n_\ell - 1} - 1$ cu $\left[\dfrac{-1}{p}\right] = -1$

deoarece $p \geq 2$,

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_\ell}} \right] = t_1 p^{n_1-n_\ell} + \ldots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1}-n_\ell} + t_\ell p^0 - 1 \text{ cu } \left[\frac{-1}{p^{n_\ell}} \right] = -1$$

cu $p \geq 2, \; n_\ell \geq 1$,

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_\ell+1}} \right] = t_1 p^{n_1-n_\ell-1} + \ldots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1}-n_\ell-1} + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_\ell+1}} \right] =$$

$$= t_1 p^{n_1-n_\ell-1} + \ldots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1}-n_\ell-1} \text{ deoarece}$$

$$0 < t_\ell p^{n_\ell} - 1 \leq p \cdot p^{n_\ell} - 1 < p^{n_\ell+1} \text{ cu } t_\ell < p \; ;$$

$\vdots$

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_{\ell-1}}} \right] = t_1 p^{n_1 n_{\ell-1}} + \ldots + t_{\ell-1} p^0 + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_{\ell-1}}} \right] = t_1 p^{n_1-n_{\ell-1}} +$$

$$+ \ldots + t_{\ell-1} p^0 \text{ cu } n_{\ell-1} > n_\ell \; ,$$

$\vdots$

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^0 + \left[\frac{t_2 p^{n_2} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^0 \; .$$

Deoarece $0 < t_2 p^{n_2} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} - 1 \leq (p-1) \; p^{n_2} + \ldots +$

$$+ (p-1)p^{n_{\ell-1}} + p\cdot p^{n_\ell} - 1 \leq (p-1)\cdot \sum_{i=n_{\ell-1}}^{n_2} p^i + p^{n_\ell-1} - 1 \leq$$

$$\leq (p-1) \frac{p^{n_2-1}}{p-1} = p^{n_2-1} - 1 < p^{n_1} - 1 < p^{n_1} -$$

$$- \left[\frac{t_2 p^{n_2} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_1}} \right] = 0$$

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_1+1}} \right] = \left[\frac{t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_1+1}} \right] = 0 \text{ deoarece:}$$

$$0 < t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} - 1 < p^{n_1+1} - 1 < p^{n_1+1}$$

conform unui raţionament similar cu cel anterior.

Adunând, rezultă că suma exponenţilor puterilor naturale ale lui p care constituie factori ai produsului $(z-1)!$ este:

$$t_1 (p^{n_1-1} + \ldots + p^0) + \ldots + t_{\ell-1} (p^{n_{\ell-1}-1} + \ldots + p^0) +$$

$$+ t_\ell (p^{n_\ell-1} + \ldots + p^0) - 1\cdot n_\ell = k - n_\ell < k - 1 < k \text{ deoarece}$$

$n_t > 1 \Rightarrow (z-1)! = \mathcal{M}p^k$, care contrazice presupunerea făcută.

$\Rightarrow \eta_p(k)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea $(\eta_p(k))! = \mathcal{M}p^k$.

Construim o nouă funcţie $\eta: Z \setminus \{0\} \to N$ definită după cum urmează:

$$\begin{cases} \eta(\pm 1) = 0, \\ \forall\, n = \epsilon\, p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} \text{ cu } \epsilon = \pm 1,\ p_i = \text{prime}, \\ p_i \neq p_j, \text{ cu } i \neq j,\ \alpha_i \geq 1,\ i = \overline{1,s},\ \eta(n) = \\ = \max\limits_{i=\overline{1,s}} \{\eta_{p_i}(\alpha_i)\}. \end{cases}$$

Nota 1.1.2. η este bine definită şi peste tot definită.

Demonstraţie:

(a) $\forall\, n \in Z$, $n \neq 0$, $n \neq \pm 1$, n este scris în mod unic, abstracţie de ordinea factorilor, sub forma

$n = \epsilon\, p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ cu $\epsilon = \pm 1$ unde p_i = prime, $p_i \neq p_j$, $\alpha_i \geq 1$ (descompunere în factori primi în inelul Z).

$\Rightarrow \exists!\ \eta(n) = \max\limits_{\overline{1,s}} \{\eta_{p_i}(\alpha_i)\}$ cu s finit şi $\eta_{p_i}(\alpha_i) \in N^*$

şi $\exists \max_{i=\overline{1,s}} (\eta_{p_i}(\alpha_i))$

(b) $n = \pm 1 - \exists ! \ \eta(n) = 0$.

Teorema 1.1.2. Funcţia η definită anterior are următoarele proprietăţi:

(1) $(\eta(n))! = \mathcal{M} n, \ \forall n \in Z \setminus \{0\}$;

(2) $\eta(n)$ este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

Demonstraţie:

(a) $\eta(n) = \max_{i=\overline{1,s}} (\eta_{p_i}(\alpha_i)), \ n = \epsilon \cdot p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$,

$(n \neq \pm 1)$,

$(\eta_{p_1}(\alpha_1))! = \mathcal{M} p_1^{\alpha_1}$,

$\vdots$

$(\eta_{p_s}(\alpha_s))! = \mathcal{M} p_s^{\alpha_s}$.

Presupunând că

$$\max_{i=\overline{1,s}} (\eta_{p_i}(\alpha_i)) = \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) - (\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! =$$

$= \mathcal{M} p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}), \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) \in N^*$ şi deoarece $(p_i, p_j) = 1, \ i \neq j$,

$\Rightarrow (\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! = M p_j^{\alpha_j}, \ j = \overline{1,s}$.

$\Rightarrow (\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! = M p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$.

(b) $n = \pm 1 \Rightarrow \eta(n) = 0; \ 0! = 1, \ 1 = M\epsilon \cdot 1 = Mn.$

(2) (a) $n \neq \pm 1 \Rightarrow n = \epsilon \, p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} \Rightarrow \eta(n) = \max\limits_{i=\overline{1,s}} \eta_{p_i}$.

Fie $\max\limits_{i=\overline{1,s}} (\eta_{p_i}(\alpha_i)) = \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}), \ 1 \leq i \leq s$;

$\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0})$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$$(\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! = M p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \Rightarrow \forall \gamma \in N, \ \gamma < \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) \Rightarrow$$

$$\gamma! \neq M p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \Rightarrow \gamma! \neq M \epsilon \cdot p_1^{\alpha_1} \ldots p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \ldots p_s^{\alpha_s} = M n$$

$\Rightarrow \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0})$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea:

(b) $n = \pm 1 \Rightarrow \eta(n) = 0$ şi este cel mai mic număr natural

=> 0 este cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$0! = M(\pm 1)$.

Nota 1.1.3. Funcţiile η_p sunt crescătoare, neinjective, şi pe $N^* - \{p^k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ sunt surjective.

Funcţia η este crescătoare, neinjectivă, şi surjectivă pe

$$Z \setminus \{0\} \to N \setminus \{1\}.$$

Consecinţa 1.1.1. Fie $n \in N^*$, $n > 4$. Atunci $n = \text{prim} \Leftrightarrow \eta(n) = n$.

Demonstraţie:

"$\Rightarrow$"

$n = \text{prim}$ şi $n \geq 5 \Rightarrow \eta(n) = \eta_n(1) = n$.

"$\Leftarrow$"

Fie $\eta(n) = n$ şi să presupunem prin absurd că $n \neq \text{prim} \Rightarrow$

(a) ori $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ cu $s \geq 2$, $\alpha_i \in N^*$, $i = \overline{1,s}$,

$$\eta(n) = \max_{i=\overline{1,s}} \{\eta_{p_i}(\alpha_i)\} = \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) < \alpha_{i_0} p_{i_0} < n$$

contrazice asumpţia anterioară; ori

(b) $n = p_1^{\alpha_1}$ cu $\alpha_1 \geq 2 \Rightarrow \eta(n) = \eta_{p_1}(\alpha_1) \leq p_1 \cdot \alpha_1 < p_1^{\alpha_1} = n$

deoarece $\alpha_1 \geq 2$ şi $n > 4$ care contrazice ipoteza.

Aplicaţii:

1.1.1. Să se găsească cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$$n! = \mathcal{M}(\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}).$$

Soluţie:

$$\eta(\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}) = \max(\eta_2(31), \eta_3(27), \eta_7(13)).$$

Să calculăm $\eta_2(31)$; formăm şirul $(a_n^{(2)})_{n \in N^*} =$ $= 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$

$31 = 1 \cdot 31 \Rightarrow \eta_2(31) = \eta_2(1 \cdot 31) = 1 \cdot 2^5 = 32.$

Să calculăm $\eta_3(27)$; formăm şirul $(a_n^{(3)})_{n \in N^*} =$ $= 1, 4, 13, 40, \ldots$; $27 = 2 \cdot 13 + 1 \Rightarrow \eta_3^{(27)} = \eta_3(2 \cdot 13 + 1 \cdot 1) =$ $= 2 \cdot \eta_3(13) + 1 \cdot \eta_3(1) = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^1 = 54 + 3 = 57.$

Să calculăm $\eta_7(13)$; formăm şirul $(a_n^{(7)})_{n \in N^*} =$ $= 1, 8, 57, \ldots$; $13 = 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1 \Rightarrow \eta_7(13) = 1 \cdot \eta_7(8) + 5 \cdot \eta_7(1) =$ $= 1 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 = 49 + 35 = 84 \Rightarrow \eta(\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}) = \max(32, 57, 84) = 84 \Rightarrow 84! = M(\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13})$ şi 84 este cel mai mic număr cu această proprietate.

1.2.3. Care sunt numerele ale căror factoriale se termină în 1000 de zerouri ?

Soluţie:

$n = 10^{1000}$, $(\eta(n))! = M10^{1000}$ şi este cel mai mic număr cu această proprietate.

$$\eta(10^{1000}) = \eta(2^{1000} \cdot 5^{1000}) = \max(\eta_2(1000), \eta_5(1000)) =$$

$$= \eta_5(1000) = \eta_5(1 \cdot 781 + 1 \cdot 156 + 2 \cdot 31 + 1) = 1 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^4 +$$

$- 2\cdot 5^3 + 1\cdot 5^7 = 4005$, 4005 este cel mai mic număr cu această proprietate. 4006, 4007, 4008, 4009 verifică proprietatea dar 4010 nu, deoarece $4010! = 4009!\ 4010$ are 1001 zerouri.

[Publicată în "An. Univ. Timişoara ",seria Şt. Matematice, Vol. XVIII, fasc. 1, pp. 79-88, 1980; vezi Mathematical Reviews: 83c : 10008.]

1.2. O infinitate de probleme nerezolvate referitoare la această funcţie

& 1.2.1. Abstract:

W. Sierpinski a afirmat la un congres internaţional că dacă omenirea va dura la infinit, atunci toate aceste probleme nerezolvate vor fi cândva rezolvate.

Scopul acestei lucrări este de a produce o infinitate de probleme deschise pentru a arăta că supoziţia sa nu-i adevărată. Mai mult, autorul consideră că problemele deschise propuse în această lucrare nu vor fi niciodată rezolvate toate!

Orice perioadă de timp are problemele ei nerezolvate, care apar odată cu progresul ştiinţific. Numărul de probleme noi nerezolvate creşte exponenţial, în comparaţie cu cele vechi rezolvate până în prezent. Cercetări asupra unei probleme nerezolvate pot duce la alte probleme nerezolvate interesante. Cititorul este invitat să-şi exprime opiniile despre aserţiunile care urmează.

& 1.2.2. Introducere.

Am construit o funcţie η care asociază fiecărui întreg nenul n cel mai mic număr pozitiv m astfel încât m! este multiplu al lui n. Astfel, dacă n are forma standard:

$n = \epsilon\, p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$, cu toţi p_i numere prime distincte, toţi $a_i \in N^*$, şi $\epsilon = \pm 1$, atunci $\eta(n) = \max_{1 \le i \le r} \{\eta_{p_i}(a_i)\}$, şi

$\eta(\pm 1) = 0$.

Acum, să definim funcţiile η_p: fie p un număr prim şi $a \in N^*$; atunci $\eta_p(a)$ este cel mai mic întreg b astfel încât b! e multiplu al lui p^a. Construim şirul:

$$\alpha_k^{(p)} = \frac{p^k - 1}{p - 1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

avem că $\eta_p(\alpha_k^{(p)}) = p^k$, pentru orice p şi orice k = 1, 2, ... Deoarece orice $a \in N^*$ se scrie în mod unic sub forma

$$a = t_1 \alpha_{n_1}^{(p)} + \dots + t_e \alpha_{n_e}^{(p)}, \text{ unde } n_1 > n_2 > \dots > n_e > 0,$$

şi $1 \le t_j \le p - 1$, cu $j = 0, 1, \dots, e - 1$, şi $1 \le t_e \le p$, cu toţi n_i, t_i din N, am demonstrat că

$$\eta_p(a) = \sum_{i=1}^{e} t_i\, \eta_p(\alpha_{n_i}^{(p)}) = \sum_{i=1}^{e} t_i p^{n_i}.$$

& 1.2.3. Câteva proprietăţi ale funcţiei η

În mod clar funcţia η este pară: $\eta(-n) = \eta(n)$, $n \in Z^*$. Dacă $n \in N^*$ atunci:

$$(1)\quad \frac{-1}{(n-1)!} \le \frac{\eta(n)}{n} \le 1 ,$$

şi $\frac{\eta(n)}{n}$ este maxim dacă şi numai dacă n este prim sau n = 4;

$\frac{\eta(n)}{n}$ este minim dacă şi numai dacă n = k! .

În mod clar η nu este periodică. Dacă p este prim, funcţiile η_p sunt crescătoare, neinjective, dar pe $N^* - \{p^k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ ele sunt surjective. Din (1) deducem că

$$\eta = o(n^{1+\epsilon}),\ \epsilon > 0,\ \text{şi}\ \ \eta = O(n).$$

Funcţia η este general crescătoare pe N*, adică: $(\forall)$ $n \in N^*$, $(\exists)$ $m_0 \in N^*$, $m_0 = m_0(n)$, astfel încât pentru orice $m \ge m_0$ avem $\eta(m) \ge \eta(n)$ (şi general descrescătoare pe Z^*_-); nu este injectivă, dar este surjectivă pe $Z\backslash\{0\} \to N\backslash\{1\}$.

Numărul n este numit barieră pentru funcţia teoretică numerică f(m) dacă pentru orice m < n, m + f(m) <= n (P. Erdös şi J. L. Selfridge). Are $\epsilon\,\eta(m)$ un număr infinit de bariere, unde $0 < \epsilon \le 1$? [Nu, fiindcă există un $m_0 \in N$ astfel încât pentru orice $n - 1 \ge m_0$ avem $\eta(n-1) \ge \frac{2}{\epsilon}$ (η este general crescătoare), de unde $n - 1 + \epsilon\,\eta(n-1) \ge n - 1$.]

$\sum_{n\ge 2} 1/\eta(n)$ este divergent, fiindcă $1/\eta(n) \ge 1/n$.

$$\eta\left(\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n}}}}}}}_{k \text{ ori}}\right) = 2 + \underbrace{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n}}}}}}_{k-1 \text{ ori}}$$

Demonstrație: Fie

$$a_m^{(2)} = 2^m - 1, \text{ unde } m = \underbrace{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n}}}}}}_{k-2 \text{ ori}} ;$$

atunci $\eta\left(2^{2^m}\right) = \eta_2(2^m) = \eta_2(1 + a_m^{(2)}) = \eta_2(1) + \eta_2(a_m^{(2)}) =$
$= 2 + 2^m$.

& 1.2.4. Glosar de simboluri şi notaţii

A- secvenţă: o secvenţă întreagă $1 \le a_1 < a_2 < \ldots$ astfel încât nici un a_i nu este egal cu suma unor termeni distincţi ai secvenţei diferiţi de a_i (R. K. Guy)

Ordin Mediu: dacă f(n) este o funcţie aritmetică şi g(n) este orice funcţie de n astfel încât

$f(1) + \ldots + f(n) - g(1) + \ldots + g(n)$

spunem că f(n) este de acelaşi ordin mediu ca g(n);

d(x): numărul divizorilor pozitivi ai lui x;

d_x: diferenţa dintre două numere prime consecutive: $p_{x+1} - p_x$;

Serii Dirichlet: o serie de forma $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}$, s poate fi real sau complex;

Funcţie Generatoare: orice funcţie $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(s)$ este considerată ca o funcţie generatoare pentru α_n; forma cea mai uzuală a lui $u_n(s)$ este $u_n(s) = e^{-\lambda_n \cdot s}$ unde λ_n este o secvenţă de numere pozitive care creşte în mod strict către infinit;

Log x : Logaritm Napierian de x în baza e;

Ordin Normal: f(n) are ordinul normal F(n), dacă f(n) este aproximativ egală cu F(n) pentru aproape toate valorile lui n, adică (2), $(\forall)$ $\epsilon > 0$, $(1 - \epsilon) \cdot F(n) < f(n) < (1 + \epsilon) \cdot$ pentru aproape toate valorile lui n; "aproape toate" valorile lui n înseamnă că numerele mai mici decât n care nu posedă proprietatea (2) sunt o(x);

Condiţie Lipschitz: o funcţie f verifică condiţia Lipschitz de ordin $\alpha \in (0, 1]$ dacă

$$(\exists)\ k > 0: |f(x)-f(y)| \leq k\ |x-y|^{\alpha};$$

dacă $\alpha = 1$, f este numită funcţie k Lipschitz; dacă $k < 1$, f este numită funcţie contractantă;

Funcţie multiplicativă: o funcţie $f: N^* \to C$ cu $f(1) = 1$, şi $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ unde $(m, n) = 1$;

p(x): cel mai mare factor prim al lui x;

Uniform Distribuită: o mulţime de puncte in (a, b) este uniform distribuită dacă fiecare sub-interval al lui (a, b) conţine propria sa cotă de puncte;

Rădăcini Incongruente: doi întregi x, y care satisfac congruenţa $f(x) \equiv f(y) \equiv 0 \pmod{m}$ şi astfel încât $x \not\equiv y \pmod{m}$;

Secvenţă s-aditivă: o secvenţă de forma $a_1 = \ldots = a_s = 1$ şi $a_{n+s+1} = a_{n+1} + \ldots + a_{n+s}$, $n \in N^*$ (R. Queneau);

$s(n)$: suma părţilor alicote (divizori ai lui n diferiţi de n); $\sigma(n) - n$;

$s^k(n)$: s(n) iterat de k ori;

$s^*(n)$: suma părţilor alicote unitare ale lui n;

$r_k(n)$: cel mai mic număr de numere nedepăşind n, care conţine o progresie aritmetică de k termeni;

$\pi(x)$: numărul de numere prime nedepăşind pe x;

$\pi(x; a, b)$: numărul de numere prime nedepăşind pe x şi congruente cu a modulo b;

$\sigma(n)$: suma divizorilor lui n; $\sigma_1(n)$;

$\sigma_k(n)$: suma puterilor de ordin k ai divizorilor lui n;

$\sigma^k(n)$: $\sigma(n)$ iterat de k ori;

$\sigma^*(n)$: suma divizorilor unitary ai lui n;

$\varphi(n)$: funcţia totient a lui Euler; numărul de numere prime nedepăşind n şi prime cu n;

$\varphi^k(n)$: $\varphi(n)$ iterat de k ori;

$\bar{\varphi}(n)$: $= n \prod (1 + p^{-1})$, unde produsul este calculat după toţi divizorii primi ai lui n;

$\Omega(n)$: numărul de factori primi ai lui n, considerând şi repetiţiile;

$\omega(n)$: numărul de factori primi distincţi ai lui n;

$\lfloor a \rfloor$: partea întreagă inferioară a unui număr; cel mai mare întreg, mai mic decât a;

(m, n): c.m.m.d.c. (cel mai mare divizor comun) al lui m şi n;

$[m, n]$: c.m.m.m.c. (cel mai mic multiplu comun) al lui m şi n;

$|f|$: modulul sau valoarea absolută a lui f;

$f(x) \sim g(x)$: $f(x)/g(x) \to 1$ când $x \to \infty$; f este asimptotic cu g;

$f(x) = o(g(x))$: $f(x)/g(x) \to 0$ când $x \to \infty$;

$f(x) = O(g(x))$, $f(x) \ll g(x)$: există a constantă c astfel încât $|f(x)| < cg(x)$, pentru orice x;

$\Gamma(x)$: funcţia lui Euler de ordinul întâi (funcţia gamma); $\Gamma : R^*_+ \to R$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Deci $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Dacă $x \in N^*$, $\Gamma(x) = (x - 1)!$

$\beta(x)$: funcţia lui Euler de ordinul doi (funcţia beta) $\beta : R^*_{+} \times R^*_{+} - R$,

$\beta(u, v) = \Gamma(u)\,\Gamma(v)/\Gamma(u - v) = \int_0^1 t^{u-1} \cdot (1 - t)^{v-1}\, dt$;

$\mu(x)$: funcţia lui Mobius $\mu : N - N$ $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = (-1)^k$ dacă n este produsul a $k > 1$ prime distincte; $\mu(n) = 0$ în celelalte cazuri;

$\theta(x)$: funcţia θ a lui Cebîşev; $\theta : R_{+} - R$, $\theta(x) = \Sigma \log p$ unde însumarea se face după toate numerele prime p care nu depăşesc pe x;

$\Psi(x)$: funcţia Ψ a lui Cebîşev ; $\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, cu

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, \text{ dacă n este o putere întreagă a lui p (cu p prim)}; \\ 0, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Acest glosar poate fi continuat cu ALTE FUNCŢII (ARITMETICE).

& 1.2.5. Probleme generale nerezolvate referitoare la această funcţie

(1) Se poate reprezenta $\eta(n)$ ca o expresie numai de n?

(2) Există o reprezentare asimptotică pentru $\eta(n)$? (Dacă da, să se determine.)

(3) Fie m un număr întreg nenul. În ce condiţii $\eta(n)$ divide pe n-m ? (Caz particulat când m = 1.) Desigur, pentru m = 0 este trivial: luăm n = k!, sau n liber de pătrate , etc.

(4) Este η o funcţie algebrică ? (Dacă nu, există max Card $\{n \in Z^* \mid (\exists)\ p \in R[x, y]$, p polinom nenul, cu $p(n, \eta(n)) = 0$ pentru toţi $n\}$?) Mai general, introducem noţiunea: g este o funcţie f dacă $f(x, g(x)) = 0$ pentru orice x, şi $f \in R[x, y]$, f nenulă. Este η o f funcţie ? (Dacă nu, există max Card $\{n \in Z^* \mid (\exists)\ f \in R[x, y]$, f nenulă, $f(n, \eta(n)) = 0$ pentru toţi aceşti n)?)

(5) Fie A o mulţime de numere întregi consecutive din N*. Să se calculeze max Card A pentru care η este monoton. De exemplu, Card $A \geq 5$, deoarece pentru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ η este respectiv 0, 2, 3, 4, 5.

(6) Un număr este numit η-algebric de ordin $n \in N^*$ dacă este o rădăcină a polinomului:

$$(p) \quad p_\eta(x) = \eta(n)\, x^n + \eta(n-1)\, x^{n-1} + \ldots + \eta(1)\, x^1 = 0.$$

Un η-algebric câmp M este totalitatea tuturor numerelor

$$R_\eta(\upsilon) = \frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)},$$

unde υ este un număr η-algebric dat, iar $A(\upsilon)$, $B(\upsilon)$ sunt polinoame în υ de forma (p) cu $B(\upsilon) \neq 0$. Să se studieze M.

(7) Există puncte $p_n = \eta(n)/n$ uniform distribuite în intervalul (0, 1)?

(8) Numărul 0,0234537465114..., unde şirul zecimalelor este este raţional ori iraţional?

*

Este posibil să se reprezente orice număr întreg n sub forma:

(9) $n = \pm \eta(a_1)^{a_2} \pm \eta(a_2)^{a_3} \pm \ldots \pm \eta(a_k)^{a_1}$, unde întregii $k, a_1, \ldots, a_k$, şi semnele sunt convenabil alese?

(10) Dar sub forma $n = \pm a_1^{\eta(a_1)} \pm \ldots \pm a_k^{\eta(a_k)}$?

(11) Dar sub forma $n = \pm a_1^{\eta(a_2)} \pm a_2^{\eta(a_3)} \pm \ldots \pm a_k^{\eta(a_1)}$?

*

Să se găsească cel mai mic k pentru care: $(\forall)\ n \in N^*$ cel puţin unul dintre numerele $\eta(n), \eta(n + 1), \ldots, \eta(n + k - 1)$ este:

(12) Pătrat perfect.

(13) Divizor al lui k^n.

(14) Multiplu al unui număr întreg nenul fixat p.

(15) Factorialul unui întreg pozitiv.

*

(16) Să se găsească forma generală a fracţiei continue extinse $\eta(n)/n$, pentru orice $n >= 2$.

(17) Există numere întregi m, n, p, q, unde $m \neq n$ sau $p \neq q$, pentru care $\eta(m) + \eta(m + 1) + \ldots + \eta(m + p) = \eta(n) + \eta(n + 1) + \ldots + \eta(n + q)$?

(18) Există numere întregi m, n, p, k, cu $m \neq n$ şi $p > 0$, astfel încât:

$$\frac{\eta(m)^2 + \eta(m + 1)^2 + \ldots + \eta(m + p)^2}{\eta(n)^2 + \eta(n + 1)^2 + \ldots + \eta(n + p)^2} = k \ ?$$

(19) Câte numere prime au forma:

$\overline{\eta(n)\ \eta(n-1)\ \ldots\ \eta(n-k)}$,

pentru k întreg, fixat? de exemplu:

$\overline{\eta(2)\ \eta(3)} = 23$, $\overline{\eta(5)\ \eta(6)} = 53$ sunt prime.

(20) Să se arate că $\eta(x^n) + \eta(y^n) = \eta(z^n)$ are o infinitate de soluţii întregi, pentru $n \geq 1$. De pildă, soluţia (5, 7, 2048) când n = 3. (Asupra ultimei teoreme a lui Fermat.) În general, ecuaţia diofantică $\sum_{i=1}^{k} \eta(x_i^s) = \sum_{j=1}^{m} \eta(y_j^t)$

are un număr infinit de soluţii.

(21) Există întregi pozitivi nenuli m, n, k, cu $m \neq 1 \neq n$, pentru care $\eta(m \cdot n) = m^k \cdot \eta(n)$?
Desigur, η nu este homogen de ordinul k.

(22) Se pot găsi două numere distincte k, n pentru care $\log_{\eta(k^n)} \eta(n^k)$ să fie un întreg? (Baza este $\eta(k^n)$.)

(23) Fie congruenţa: $h_\eta(x) = c_n x^{\eta(n)} + \ldots + c_1 \cdot x^{\eta(1)} \equiv 0 \pmod{m}$. Câte soluţii necongruente are h_η, considerând că $n, c_1, \ldots, c_n$ sunt constante întregi date?

(24) Se ştie că $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. Să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\eta(n)} / n!$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / \eta(n)!$ şi eventual să se determine unele proprietăţi ale acestor serii.

(25) Să se găsească ordinul mediu al lui $\eta(n)$.

(26) Să se găsească $u_n(s)$ pentru care F(s) este o funcţie generatoare a lui $\eta(n)$, şi F(s) are o formă cât mai simplă.

În caz particular, să se calculeze seria Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(n)/n^s,$$

cu $s \in R$ (ori $s \in C$).

(27) Are $\eta(n)$ un ordin normal?

(28) Se cunoaşte constanta lui Euler:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Is $\lim_{n\to\infty}\left[1 + \sum_{k=2}^{n} 1/\eta(k) - \log \eta(n)\right]$ este constantă? Dacă da, să se calculeze.

(29) Există un m pentru care $\eta^{-1}(m) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{pq}\}$ astfel încât numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{pq}$ să constituie o matrice de p linii şi q coloane cu suma elementelor pe fiecare linie şi fiecare coloană constantă? (Caz particular când matricea este pătratică.)

*

(30) Fie $(x_n^{(s)})_{n\geq 1}$ o secvenţă s-aditivă.

Este posibil ca $\eta(x_n^{(s)}) = x_m^{(s)}$, $n \neq m$? Dar $x_{\eta(n)}^{(s)} = \eta(x_n^{(s)})$?

(31) Verifică η o condiţie Lipschitz?

(32) Verifică η o condiţie k-Lipschitz?

(33) Este η o funcţie contractantă?

(34) Se poate construi o A-secvenţă: $a_1, \ldots, a_n$ astfel încât $\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)$ să fie de asemenea o A-secvenţă ? Da, de exemplu 2, 3, 7, 31, ... Să se determine o altă A-secvenţă infinită.

*

Să se determine cel mai mare n astfel încât: dacă $a_1, \ldots, a_n$ constituie o p-secvenţă, atunci şi $\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)$ să constituie o p-secvenţă; unde p-secvenţă înseamnă:

(35) Progresie aritmetică.

(36) Progresie geometrică.

(37) Un sistem complet de reziduri modulo n.

Observaţie: fie p un număr prim, şi $p, p^2, \ldots, p^p$ o progresie geometrică, atunci $\eta(p^i) = ip$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, constituie o progresie aritmetică de lungime p. În acest caz $n \to \infty$.

(38) Fie secvenţa $a_n = \eta(n)$, $n \geq 1$. Există o relaţie de recurenţă de forma $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots)$ pentru orice n?

(39) Există grupuri de numere consecutive compuse $m + 1, \ldots, m + n$ astfel încât şi $\eta(m + 1), \ldots, \eta(m + n)$ să fie numere compuse? Să se găsească cel mai mare n.

(40) Să se găsească numărul de partiţii ale lui n ca sumă de $\eta(m)$, $2 < m \leq n$.

ALTE PROBLEME GENERALE DESCHISE REFERITOARE LA FUNCŢIA η

& 1.2.6. Probleme nerezolvate referitoare la funcţia η în relaţii cu secvenţe numerice

41-2065) Există numere întregi nenule şi neprime a_1, a_2, ..., a_n în relaţia P, astfel încât $\eta(a_1)$, $\eta(a_2)$, ..., $\eta(a_n)$ să fie în relaţia R? Să se găsească cel mai mare n cu această proprietate. (Desigur, toţi a_i sunt distincţi.) Unde P şi R pot fi reprezentate de oricare din următoarele secvenţe de numere:

(1) Numere abundente; $a \in N$ este abundent dacă $\sigma(a) > 2a$.

(2) Numere aproape perfecte; $a \in N$, $\sigma(a) = 2a - 1$.

(3) Numere amicale; în acest caz luăm n = 2; a, b sunt numite amicale dacă $a \neq b$ şi $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$.

(4) Numere amicale mărite; în acest caz n = 2; a, b sunt numite amicale mărite dacă $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b - 1$ (Walter E. Beck şi Rudolph M. Najar).

(5) Numere Bell: $b_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$, unde S(n, k) sunt numere Stirling de ordinul doi.

(6) Numere Bernoulli (Jacques I): B_n, coeficienţii dezvoltării următoarei serii infinite:

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{B_1}{2!}t^2 - \frac{B_2}{4!}t^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}t^{2n} + \ldots,$$

pentru $0 < |t| < 2\pi$; (aici considerăm $\lfloor 1/B_n \rfloor$).

(7) Numere Catalan: $c_1 = 1$, $c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ pentru $n \geq 2$.

(8) Numere Carmichael; un număr compus impar a, care este pseudoprim în baza b pentru orice b relativ prim cu a, se numeşte număr Carmichael

(9) Numere congruente; fie n = 3, şi numerele a, b, c; trebuie să avem $a \equiv b \pmod{c}$.

(10) Numere Cullen: $C_n = n \cdot 2^n + 1$, $n \geq 0$.

(11) C_1-secvenţă de întregi; autorul introduce o secvenţă $a_1, a_2, \ldots$ astfel încât:

$(\forall)\ i \in N^*,\ (\exists)\ j, k \in N^*,\ j \neq i \neq k \neq j,\ : a_i \equiv a_j \pmod{a_k}$.

(12) C_2-secvenţă de întregi; autorul introduce o secvenţă $a_1, a_2, \ldots$ astfel încât:

$(\forall)\ i \in N^*,\ (\exists)\ j, k \in N^*,\ i \neq j \neq k \neq i,\ : a_j \equiv a_k \pmod{a_i}$.

(13) Numere deficiente; $a \in N^*$, $\sigma(a) < 2a$.

(14) Numere Euler: coeficienţii E_n în dezvoltarea seriei: $\sec x = \sum_{n \geq 0} E_n x^n/n!$; aici luăm $|E_n|$.

(15) Numere Fermat: $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \geq 0$.

(16) Numere Fibonacci: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$.

(17) Numere Genocchi: $G_n = 2\,(2^{2n} - 1)\,B_n$, unde B_n sunt numere Bernoulli; întotdeauna $G_n \in Z$.

(18) Medie harmonică; în acest caz orice termen al secvenţei este medie harmonică a termenilor precedenţi.

(19) Numere harmonice; un număr n se numeşte harmonic dacă media harmonică a tuturor divizorilor săi este un întreg (C. Pomerance).

(20) Numere heteromeice: $h_n = n(n + 1)$, $n \in N^*$.

(21) Numere k-hiperperfecte; a este k-hiperperfect dacă $a = 1 + \Sigma d_i$, unde însumarea se face după toţi divizorii proprii, $1 < d_i < a$, ori $k\sigma(a) = (k + 1)a + k - 1$ (Daniel Minoli şi Robert Bear).

(22) Numere Kurepa: $!n = 0! + 1! + 2! + \ldots + (n - 1)!$

(23) Numere Lucas: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 3$.

(24) Numere norocoase: din mulţimea numerelor naturale se elimină cele pare, lăsând pe cele impare; în afară de 1, primul rămas este 3; acum se elimină fiecare al treilea număr din noua secvenţă; următorul număr rămas este 7; din nou se elimină de data aceasta fiecare al şaptelea număr din secvenţa rezultată; următorul rămas este 9; etc. (V. Gardiner, R. Lazarus, N. Metropolis, S. Ulam).

(25) Numere Mersenne: $M_p = 2^p - 1$.

(26) Numere m-perfecte; a este m-perfect dacă $\sigma^m(a) = 2a$ (D. Bode).

(27) Numere perfecte k-îndoite; a este perfect k-îndoit dacă

$$\sigma(a) = k\,a.$$

(28) Numere perfecte; a este perfect dacă $\sigma(a) = 2a$.

(29) Numere poligonale (reprezentate pe perimetrul unui poligon): $p_n^k = k(n - 1)$.

(30) Numere poligonale (reprezentate pe suprafaţa unui poligon):

$$p_n^k = \frac{(k-2)\,n^2 - (k-4)\,n}{2}.$$

(31) Numere abundente primitive; a este abundent primitiv dacă este abundent, şi nici unul dintre divizori săi proprii nu este abundent.

(32) Numere pseudoperfecte primitive; a este pseudoperfect primitiv dacă este pseudoperfect, şi nici unul dintre divizorii săi proprii nu este pseudoperfect.

(33) Numere pseudoperfecte; a este pseudoperfect dacă este egal cu suma unora dintre divizori săi proprii (W. Sierpiński).

(34) Numere pseudoprime în baza b; a este pseudoprim în baza b dacă a este un număr compus impar pentru care $b^{a-1} \equiv 1$ (mod a) (C. Pomerance, J. L. Selfridge, S. Wagstaff).

(35) Numere piramidale: $\pi_n = \frac{1}{6} n (n + 1)(n + 2)$, $n \in N^*$.

(36) Numere pitagoreice; fie n = 3 şi a, b, c întregi; atunci avem relaţia: $a^2 = b^2 + c^2$.

(37) Reziduri pătratice modulo p: numerele nenule r pentru care congruenţa $r \equiv x^2 \pmod p$ are soluţii.

(38) Numere cvasi-perfecte; a este cvasi-perfetc dacă $\sigma(a) = 2a + 1$.

(39) Numere amicale reduse; considerăm n = 2; doi întregi a, b pentru care $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b + 1$ sunt numiţi numere amicale reduse (Walter E. Beck şi Rudolph M. Najar).

(40) Numere Stirling de ordinul întâi: $s(0, 0) = 1$, şi $s(n, k)$ este coeficientul lui x^k din dezvoltarea $x(x - 1) \ldots (x - n + 1)$.

(41) Numere Stirling de ordinul doi: $S(0, 0) = 1$, şi S(n, k) este coeficientul polinomului $x^{(k)} = x(x - 1) \ldots (x - k + 1)$, $1 \le k \le n$, din dezvoltarea (care se scrie în mod unic):

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, x^{(k)}.$$

(42) Numere super-perfecte; a este super-perfetc dacă $\sigma^2(a) = 2a$ (D. Suryanarayana).

(43) Numere de neatins; a este de neatins dacă $s(x) = 1$ nu are soluţii (Jack Alanen).

(44) U-numere: pornind de la numerele arbitrare u_1 şi u_2 continuăm cu acele numere care se pot exprimă numai într-un fel

ca suma a doi termeni distincţi anteriori ai secvenţei (S. M. Ulam).

(45) Numere sinistre; a este numit sinistru dacă este abundent dar nu pseudoperfect (S. J. Benkovski).

ALTE SECVENŢE NUMERICE

*

Problema nerezolvată Nr. 41 se obţine luând P = (1) şi R = (1).

Problema nerezolvată Nr. 42 se obţine luând P = (1) şi R = (2).

Problema nerezolvată Nr. 2065 se obţine luând P = (45) şi R = (45).

ALTE PROBLEME NEREZOLVATE REFERITOARE LA FUNCŢIA η ÎN RELAŢII CU SECVENŢE NUMERICE

*

& 1.2.7. Ecuaţii diofantice nerezolvate referitoare la funcţia η

2066) Fie $0 < k \leq 1$ un număr raţional. Ecuaţia diofantică $\eta(n)/n = k$ are întotdeauna soluţii ? Să se afle toate valorile lui k pentru care această ecuaţie are un număr infinit de soluţii. (De exemplu, dacă $k = 1/r$, $r \in N^*$, atunci $n = rp_{a+h}$, $h = 1, 2, \ldots$, cu toţi p_{a+h} primi, şi a este un index ales astfel încât $p_{a+1} > r$.)

2067) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ o secvenţă, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, şi $a_{n+1} = a_{\eta(n)} + \eta(a_n)$. Există o infinitate de cupluri (m, n), $m \neq n$, pentru care $a_m = a_n$? (De exemplu $a_9 = a_{13} = 16$.)

2068) Conjectură: ecuaţia $\eta(x) = \eta(x + 1)$ nu are nici o soluţie.

*

Fie m, n numere întregi fixe. Să se rezolve ecuaţiile diofantice următoare:

2069) $\eta(m\,x + n) = x$.

2070) $\eta(m\,x + n) = m + n\,x$.

2071) $\eta(m\,x + n) = x!$

2072) $\eta(x^m) = x^n$.

2073) $\eta(x)^m = \eta(x^n)$.

2074) $\eta(m\,x + n) = \eta(x)^y$.

2075) $\eta(x) + y = x + \eta(y)$, x şi y nu sunt prime.

2076) $\eta(x) + \eta(y) = \eta(x + y)$, x şi y nu prime gemene. (În mod general η nu este aditivă.)

2077) $\eta(x + y) = \eta(x)\cdot\eta(y)$. (În mod general η nu este exponenţială.)

2078) $\eta(xy) = \eta(x)\eta(y)$. (În mod general η nu este multiplicativă.)

2079) $\eta(m\,x + n) = x^y$.

2080) $\eta(x)\,y = x\,\eta(y)$, x şi y nu sunt prime.

2081) $\eta(x)/y = x/\eta(y)$, x şi y nu sunt prime.

(În caz particular când $y = 2^k$, $k \in N$, i.e., $\eta(x)/2^k$ este un număr raţional diadic.)

2082) $\eta(x)^{y} = x^{\eta(y)}$, x şi y nu sunt prime.

2083) $\eta(x)^{\eta(y)} = \eta(x^{y})$.

2084) $\eta(x^{y}) - \eta(z^{w}) = 1$, cu $y \neq 1 \neq w$. (Asupra problemei lui Catalan.)

2085) $\eta(x^{y}) = m$, $y \geq 2$.

2086) $\eta(x^{x}) = y^{y}$. (O soluţie trivială: $x = y = 2$.)

2087) $\eta(x^{y}) = y^{x}$. (O soluţie trivială: $x = y = 2$.)

2088) $\eta(x) = y!$ (Un exemplu: $x = 9$, $y = 3$.)

2089) $\eta(m\,x) = m\,\eta(x)$, $m \geq 2$.

2090) $m^{\eta(x)} + \eta(x)^{n} = m^{n}$.

2091) $\eta(x^{2})/m \pm \eta(y^{2})/n = 1$.

2092) $\eta(x_1^{y_1} + \ldots + x_r^{y_r}) = \eta(x_1)^{y_1} + \ldots + \eta(x_r)^{y_r}$.

2093) $\eta(x_1! + \ldots + x_r!) = \eta(x_1)! + \ldots + \eta(x_r)!$.

2094) $(x, y) = (\eta(x), \eta(y))$, x şi y nu sunt prime.

2095) $[x, y] = [\eta(x), \eta(y)]$, x şi y nu sunt prime.

ALTE ECUAŢII DIOFANTICE NEREZOLVATE REFERITOARE NUMAI LA FUNCŢIA η

*

& 1.2.8. Ecuaţii diofantice nerezolvate referitoare la funcţia η în corelaţie cu alte funcţii

Fie m, n numere întregi fixate. Să se rezolve următoarele ecuaţii diofantice:

2096-2102) $\eta(x) = d(m\,x + n)$

$\eta(x)^{m} = d(x^{n})$

$\eta(x) + y = x + d(y)$

$\eta(x) \cdot y = x \cdot d(y)$

$\eta(x)/y = d(y)/x$

$\eta(x)^y = x^{d(y)}$

$\eta(x)^y = d(y)^x$

2103-2221) Aceleaşi ecuaţii de mai înainte, dar substituim funcţia $d(x)$ respectiv cu d_x, $p(x)$, $s(x)$, $s^k(x)$, $s*(x)$, $r_k(x)$, $\pi(x)$, $\pi(x; m, n)$, $\sigma_k(x)$, $\sigma^k(x)$, $\sigma*(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi^k(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\Omega(x)$, $\omega(x)$ respectively.

2222) $\eta(s(x, y)) = s(\eta^{(x)}, \eta(y))$.

2223) $\eta(S(x, y)) = S(\eta(x), \eta(y))$.

2224) $\eta(\lfloor x \rfloor) = \lfloor \Gamma(x) \rfloor$.

2225) $\eta(\lfloor x - y \rfloor) = \lfloor \beta(x, y) \rfloor$.

2226) $\beta(\eta(\lfloor x \rfloor), y) = \beta(x, \eta(\lfloor y \rfloor))$.

2227) $\eta(\lfloor \beta(x, y) \rfloor) = \lfloor \beta(\eta(\lfloor x \rfloor), \eta(\lfloor y \rfloor)) \rfloor$.

2228) $\mu(\eta(x)) = \mu(\varphi(x))$.

2229) $\eta(x) = \lfloor \theta(x) \rfloor$.

2230) $\eta(x) = \lfloor \psi(x) \rfloor$.

2231) $\eta(m\ x + n) = A_x^n = x(x - 1) \ldots (x - n + 1)$.

2232) $\eta(m\ x + n) = A_x^m$.

2233) $\eta(m\ x + n) = \binom{x}{n} = \dfrac{x!}{n!(x-n)!}$.

2234) $\eta(m\ x + n) = \binom{x}{m}$.

2235) $\eta(m\ x + n) = p_x$ = al x-lea prim.

2236) $\eta(m\ x + n) = \lfloor 1/B_x \rfloor$.

2237) $\eta(m\ x + n) = G_x$.

2238) $\eta(m\ x + n)$

2239) $\eta(m\ x + n) = k_x^n$.

2240) $\eta(m\ x + n) = s(m,\ x)$.

2241) $\eta(m\ x + n) = s(x,\ n)$.

2242) $\eta(m\ x + n) = S(m,\ x)$.

2243) $\eta(m\ x + n) = S(x,\ n)$.

2244) $\eta(m\ x + n) = \pi_x$.

2245) $\eta(m\ x + n) = b_x$.

2246) $\eta(m\ x + n) = |E_x|$.

2247) $\eta(m\ x + n) = !\ x$.

2248) $\eta(x) \equiv \eta(y) \pmod{m}$.

2249) $\eta(xy) \equiv x \pmod{y}$.

2250) $\eta(x)\ (x + m) + \eta(y)\ (y + m) = \eta(z)\ (z + m)$.

2251) $\eta(m\ x + n) = f_x$.

2252) $\eta(m\ x + n) = F_x$.

2253) $\eta(m\ x + n) = M_x$.

2254) $\eta\ (m\ x + n) = c_x$.

2255) $\eta\ (m\ x + n) = C_x$.

2256) $\eta\ (m\ x + n) = h_x$.

2257) $\eta\ (m\ x + n) = L_x$.

Alte ecuaţii diofantice nerezolvate referitoare la funcţia η în corelaţie cu alte funcţii.

*

& 1.2.9. Ecuaţii diofantice nerezolvate referitoare la funcţia η compusă cu alte funcţii

2258) $\eta(d(x)) = d(\eta(x))$, x nu este prim.

2259-2275) Ecuaţia de mai înainte, dar în care substituim funcţia d(x) respectiv cu d_x, $p(x)$, ..., $\omega(x)$.

Alte ecuaţii diofantice nerezolvate referitoare la funcţia η compusă cu alte funcţii. (De exemplu:

$\eta(\pi(4(x))) = \varphi(\eta(\pi(x)))$, etc.)

*

& 1.2.10. Inecuaţii diofantice nerezolvate referitoare la funcţia η

Fie m, n numere întregi fixate. Să se rezolve următoarele inecuaţii diofantice:

2276) $\eta(x) \geq \eta(y)$.

2277) Inegalitatea $0 < \{x/\eta(x)\} < \{\eta(x)/x\}$ are loc pentru o infinitate de valori ale lui x? unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţională a lui a.

2278) $\eta(m x + n) < d(x)$.

2279-2300) Aceleaşi inecuaţii de mai înainte (or similare), dar substituim funcţia d(x) respectiv cu d_x, $p(x)$, ..., $\omega(x)$, $\Gamma(x)$, $\beta(x, x)$, $\mu(x)$, $\theta(x)$, $\Psi(x)$.

Alte inecuaţii diofantice nerezolvate referitoare la funcţia η în corelaţie (or compoziţie) cu alte funcţii. (De exemplu:

$\theta(\eta(\lfloor x \rfloor)) < \eta(\lfloor \theta(x) \rfloor)$, etc.)

*

& 1.2.11. Funcţii aritmetice construite cu ajutorul funcţiei η

PROBLEME NEREZOLVATE REFERITOARE LA ACESTE FUNCŢII NOI

I. Funcţiile $S_\eta : N^* \to N$, $S_\eta(x) = \sum_{0<n\le x} \eta(n)$.

2301) $\sum_{x\ge 2} S_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

2302) Să se găsească cel mai mic k pentru care $\underbrace{(S_\eta \bullet \ldots \bullet S_\eta)}_{k\ times}(m) \ge n$, unde m, n sunt numere întregi fixate.

2303-4602) Să se studieze S_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru S_η ca pentru η.

II. Funcţia $C_\eta : N^* \to Q$, $C_\eta(x) = \frac{1}{x}(\eta(1) + \eta(2) + \ldots + \eta(x))$ (suma Cesaro referitoare la funcţia η).

4603) $\sum_{x\ge 1} C_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

4604) Să se găsească cel mai mic k pentru care $\underbrace{(C_\eta \circ \ldots \circ C_\eta)}_{k\ ori}(m) \ge n$, unde m, n sunt numere întregi fixate.

4605-6904) Să se studieze C_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru C_η ca pentru η.

III. Funcţia $\Xi_\eta : N^* \to N$, $\Xi_\eta(x) = \sum_{k=1}^{k_0} \eta^{(k)}(x)$, unde

$\eta^{(1)} = \eta$ şi $\eta^{(k)} = \eta \circ \ldots \circ \eta$ de k ori, şi k_0 este cel mai mic întreg k pentru care $\eta^{(k+1)}(x) = \eta^{(k)}(x)$.

6905) $\sum_{x \geq 2} \Xi_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

6906) Să se afle cel mai mic x pentru care $\Xi_\eta(x) > m$, unde m este un întreg fixat.

6907-9206) Să se studieze Ξ_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru S_η ca pentru η.

IV. Funcţia $F_\eta : N \setminus \{0, 1\} \to N$, $F_\eta(x) = \sum_{\substack{0<p\leq x \\ p \text{ prim}}} \eta_p(x)$.

9207) $\sum_{x \geq 2} F_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

9208-11507) Să se studieze F_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru F_η ca pentru η.

V. Funcţia $\alpha_\eta : N^* \to N$, $\alpha_\eta(x) = \sum_{n=1}^{x} \beta(n)$, unde

$$\beta(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \eta(n) \text{ este par;} \\ 1, & \text{dacă } \eta(n) \text{ este impar.} \end{cases}$$

11508) Fie $n \in N^*$. Să se găsească cel mai mic k pentru care $\underbrace{(\alpha_\eta \circ \ldots \circ \alpha_\eta)}_{k \text{ ori}}(n) = 0$.

11509-13808) Să se studieze α_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru α_η ca pentru η.

VI. Funcţia $m_\eta : N^* \to N$, $m_\eta(j) = a_j$, $1 \le j \le n$, întregi fixaţi, şi $m_\eta(n+1) = \min_i \{\eta(a_i + a_{n-i})\}$, etc.

13809) $\sum_{x \ge 1} m_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

13810-16109) Să se studieze m_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru m_η ca pentru η.

VII. Funcţia $M_\eta : N^* \to N$. O secvenţă pozitivă finită întreagă $a_1, \ldots, a_n$ dată este extinsă în mod succesiv prin:

$M_\eta(n+1) = \max_i \{\eta(a_i + a_{n-i})\}$, etc.

$M_\eta(j) = a_j$, $1 \le j \le n$.

16110) $\sum_{x \ge 1} M_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

16111-18410) Să se studieze M_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru M_η ca pentru η.

VIII. Funcţia $\eta^{-1}_{min} : N \setminus \{1\} \to N$, $\eta^{-1}_{min}(x) = \min\{\eta^{-1}(x)\}$, unde $\eta^{-1}(x) = \{a \in N \mid \eta(a) = x\}$. De exemplu $\eta^{-1}(6) = \{2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 3^2, 3^2, 3^2 \cdot 2, 3^2 \cdot 2^2, 3^2 \cdot 2^3\}$, de unde $\eta^{-1}_{min}(6) = 9$.

18411) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$(\underbrace{\eta^{-1}_{min} \circ \ldots \circ \eta^{-1}_{min}}_{k \text{ ori}})(m) >= n$, unde m, n sunt întregi fixaţi

18412-20711) Să se studieze η^{-1}_{min}. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru η^{-1}_{min} ca pentru η.

IX. Funcţia $\eta_{card}^{-1} : N \to N$, $\eta_{card}^{-1}(x) = Card(\eta^{-1}(x))$,

unde Card înseamnă numărul de elemente al mulţimii A.

20712) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$$\Big(\underbrace{\eta_{card}^{-1} \circ \ldots \circ \eta_{card}^{-1}}_{k \text{ ori}}\Big)(m) \geq n,$$ unde m, n sunt întregi fixaţi.

20713-23012) Să se studieze η_{card}^{-1}. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru η_{card}^{-1} ca pentru η.

X. Funcţia $d_\eta : N^* \to N$, $d_\eta(x) = |\eta(x + 1) - \eta(x)|$.

Fie $d_\eta^{(k+1)}(x) = |d_\eta^{(k)}(x + 1) - d_\eta^{(k)}(x)|$, pentru toţi $k \in N^*$,

unde $d_\eta^{(1)}(x) = d_\eta(x)$.

23013) Conjectură: $d_\eta^{(k)}(1) = 1$ ori 0, pentru toţi $k \geq 2$.

(Aceasta ne aminteşte de conjectura lui Gillreath asupra numerelor prime.) De exemplu:

```
η(1)  = 0
          2
η(2)  = 2    1
          1    1
η(3)  = 3    0    1
          1    0    0
η(4)  = 4    0    1    1
          1    1    1    0
η(5)  = 5    1    0    1    0
          2    1    0    0    1
η(6)  = 3    2    0    1    1    0
          4    1    1    1    1    1
η(7)  = 7    1    1    0    2    1    0
          3    0    1    3    2    1    1
η(8)  = 4    1    0    3    0    0    1    0
          2    0    4    3    2    0    1    1
η(9)  = 6    1    4    0    2    0    0    1    1
          1    4    4    1    2    0    2    0    1
η(10) = 5    5    0    1    0    0    2    1    0    1
          6    4    3    1    2    2    1    0    0    0
η(11) =11    1    3    0    2    2    1    1    0    1
          7    1    3    3    0    1    0    0    1
η(12) = 4    2    0    3    2    1    1    1    1
          9    1    0    1    1    0    1    1
η(13) =13    3    0    2    1    1    0    0
          6    1    2    0    0    0    1
η(14) = 7    4    2    2    1    1    1
          2    3    4    1    1    1
η(15) = 5    1    6    1    0    0
          1    9    5    1    1
η(16) = 6   10    1    2    1
         11   10    7    2
η(17) =17    0    8    0
         11    2    7
η(18) = 6    2    1
         13    1
η(19) =19    1
         14
η(20) = 5
   .
   .
   .
```

23014-25313) Să se studieze $d_\eta^{(k)}$. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru $d_\eta^{(k)}$ ca pentru η.

XI. Funcţia $\omega_\eta : N^* \to N$, $\omega_\eta(x)$ este numărul de m-uri, cu $0 < m \le x$, astfel încât $\eta(m)$ divide x. Deci $\omega_\eta(x) \ge \omega(x)$, iar egalitate avem dacă x = 1 sau x este prim.

25314) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$\underbrace{(\omega_\eta \circ \ldots \circ \omega_\eta)}_{k \text{ ori}}(x) = 0$, unde x este un întreg fixat.

25315-27614) Să se studieze ω_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru ω_η ca pentru η.

XII. Funcţia $M_\eta : N^* \to N$, $M_\eta(x)$ este numărul de m-uri, cu $0 < m \leq x^x$, astfel încât $\eta(m)$ este multiplu de m. De exemplu $M_\eta(3) = \text{Card}\{1, 3, 6, 9, 12, 27\} = 6$. Dacă p este prim, $M_\eta(p) = \text{Card}\{1, a_2, \ldots, a_r\}$, atunci toţi a_i, $2 \leq i \leq r$, sunt multipli de p.

27615) Fie m, n numere întregi. Să se găsească cel mai mic k pentru care $\underbrace{(M_\eta \circ \ldots \circ M_\eta)}_{k \text{ ori}}(m) \geq n$.

27616-29915) Să se studieze M_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru M_η ca pentru η.

XIII. Funcţia $\sigma_\eta : N^* \to N$, $\sigma_\eta(x) = \sum_{\substack{d|x \\ d>0}} \eta(d)$.

De exemplu $\sigma_\eta(18) = \eta(1) + \eta(2) + \eta(3) + \eta(6) + \eta(9) + \eta(18) = 20$, $\sigma_\eta(9) = 9$.

29916) Există o infinitate de numere neprime n astfel încât $\sigma_\eta(n) = n$?

29917-32216) Să se studieze σ_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru σ_η ca pentru η.

XIV. Funcţia $\pi_\eta : N \to N$, $\pi_\eta(x)$ este numărul de n-uri cu proprietatea că $\eta(n) \leq x$. Dacă $p_1 < p_2 < \ldots < p_k \leq n < p_{k+1}$ este şirul numerelor prime, pentru $i = 1, 2, \ldots, k$ avem că $p_i^{a_i}$ divide pe n! dar $p_i^{a_i - 1}$ nu divide pe n!, atunci:

$$\pi_\eta(n) = (a_1 + 1) \ldots (a_k + 1).$$

32217-34516) Să se studieze π_η . Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru π_η ca pentru η.

XV. Funcţia $\varphi_\eta : N^* \to N$, $\varphi_\eta(x)$ este numărul de m-uri, cu $0 < m \leq x$, având proprietatea că $(\eta(m), x) = 1$.

34517) Este întotdeauna adevărată inegalitatea $\varphi_\eta(x) < \varphi(x)$?

34518) Să se găsească x astfel încât $\varphi_\eta(x) \geq \varphi(x)$.

34519) Să se găsească cel mai mic k pentru care

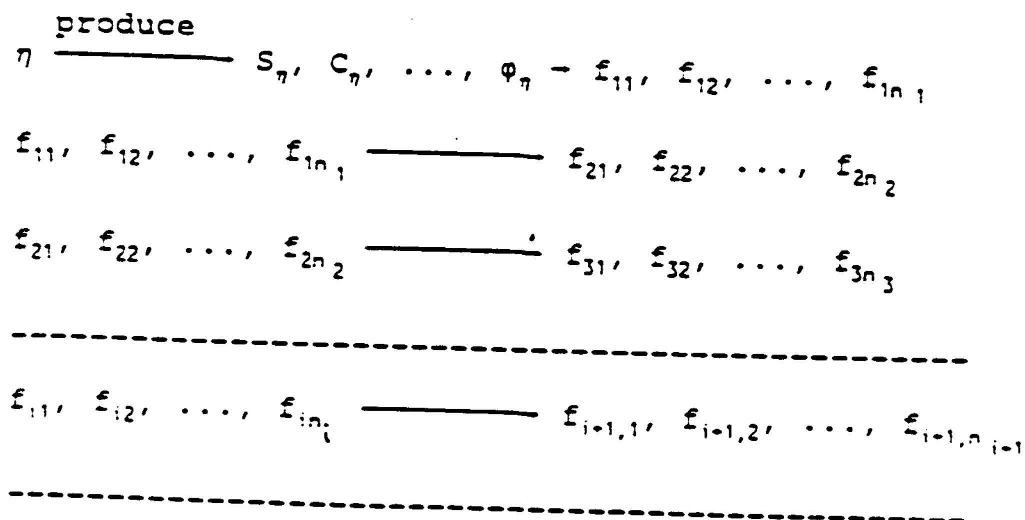
$$\underbrace{(\varphi_\eta \circ \ldots \circ \varphi_\eta)}_{k \text{ ori}}(x) = 1,$$ unde x este un întreg fixat.

34520-36819) Să se studieze φ_η. Aceleaşi întrebări (ori similare) pentru φ_η ca pentru η.

Alte probleme nerezolvate referitoare la aceste 15 funcţii.

Alte funcţii în teoria numerelor construite cu ajutorul funcţiei η, şi noi probleme nerezolvate corelate cu ele.

36320 → ∞. Putem continua aceste secvenţe recursive şi probleme deschise implicându-le la infinit. Astfel construim o infinitate de noi funcţii: folosind funcţiile S_η, C_η, ..., φ_η construim funcţiile f_{11}, f_{12}, ..., f_{1n_1} (prin diverse combinaţii între S_η, C_η, ..., φ_η; de exemplu: $S_\eta^{(i+1)}(x) = \sum_{0<n\leq x} S_\eta^{(i)}$ pentru $x \in N^*$, $S_\eta^{(i)} : N^* \to N$: pentru $i = 0, 1, 2, \ldots$, unde $S_\eta^{(0)} = S_\eta$. Sau: $SC_\eta(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x} S_\eta(n)$, $SC_\eta : N^* \to Q$, SC_η fiind o combinaţie între S_η şi C_η; etc.); în mod analog cu ajutorul funcţiilor f_{11}, f_{12}, ... f_{1n_1} construim funcţiile f_{21}, f_{22}, ..., f_{2n_2} etc. Metoda de obţinere a unor noi funcţii continuă la infinit. Pentru fiecare funcţie avem cel puţin 2300 probleme nerezolvate, iar numărul acestor funcţiilor este infinit. Metoda se poate reprezenta în următorul fel:



*

Alte metode recurente de obţinere a noi probleme deschise.

& 1.2.12. Concluzie:

În această lucrare autorul vrea să demonstreze că se pot construi o infinitate de probleme deschise, în special în teoria numerelor: se combină şi transformă numerele până se obţin relaţii interesante. Unele probleme deschise s-ar putea să afecteze dezvoltări ulterioare în ştiinţă.

Lumea este în criză generală. Oare problemele nerezolvate constituie o criză matematică sau, dimpotrivă, absenţa lor ar duce la o stagnare intelectuală? Omenirea va avea întotdeauna probleme de rezolvat, chiar nevoită fiind să rezolve din nou (pe alte căi, şi privind din alt unghi soluţiile) probleme deja rezolvate!

De exemplu, această lucrare arată că oamenii vor fi din ce în ce mai mult copleşiţi de probleme fără răspuns. [E mai uşor să întrebi, decât să răspunzi.]

Aici sunt expuse probleme (ne)rezolvate care s-ajungă pentru totdeauna!! Să presupunem că s-a rezolvat o infinitate de probleme, tot va mai rămâne o altă infinitate. Nu le descondideraţi ca fiind triviale ori neimportante, ele sunt foarte substanţiale.

Referinţe (cărţi şi articole care l-au inspirat pe autor):

Arnoux, Gabriel, Arithmétique graphique. Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques, Gauthiers-Villars, Paris, 1906.

Blanchard, A., Initiation à la théorie analytique des nombres premiers, Dunod, Paris, 1969.

Borevitch, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number Theory, Academic Press, New York, 1966.

Bouvier, Alain et George Michel (sous la direction de François Le Lionnais), Dictionnaire des Mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1979.

Carmichael, R. D., Theory of Numbers, Mathematical Monographs, No. 13, New York, Wiley, 1914.

Chandrasekharan, K., Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, 1968.

Davenport, H., Higher Arithmetic, London, Hutchinson, 1952.

Dickson, L. E., Introduction to the Theory of Numbers, Chicago Univ. Press, 1929.

Estermann, T., Introduction to Modern Prime Number Theory, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 41, 1952.

Erdös, P., Problems and Results in Combinatorial Number Theory, Bordeaux, 1974.

Fourrey, E., Récréations Arithmétiques, Troisième Édition, Vuibert et Nony, Paris, 1904.

"Gamma" Journal, Unsolved Problems Corner, Brasov, 1985.

Goodstein, R. L., Recursive Number Theory. A Development of Recursive Arithmetic in a Logic-Free Equation Calculus, North-Holland Publishing Company, 1964.

Grosswald, Emil and Hagis, Peter, Arithmetic Progressions Consisting Only of Primes, Math. Comput. 33, 1343-1352, 1979.

Guy, Richard K., Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.

Halberstam, H. and Roth, K. F., Sequences, Oxford U.P., 1966.

Hardy, G. H. and Wright, E. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon Press, Oxford, Fifth Edition, 1984.

Hasse, H., Number Theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1977.

Landau, Edmund, Elementary Number Theory, with Exercises by Paul T. Bateman and Eugene E. Kohlbecker, Chelsea, New York, 1958.

Mordell, L. J., Diophantine Equations, Academic Press, London, 1969.

Nagell, T., Introduction to Number Theory, New York, Wiley, 1951.

Niven, I., Irrational Numbers, Carus Math. Monographs, No. 11, Math. Assoc. of America, 1956.

Ogilvy, C. S., Unsolved Problems for the Amateur, Tomorrow's Math., Oxford Univ. Press, New York, 1962.

Ore, O., Number Theory and Its History, McGraw-Hill, New York, 1978.

Report of Institute in the Theory of Numbers, Univ. of Colorado, Boulder, 1959.

Shanks, Daniel, Solved and Unsolved Problems in Number Theory, Spartan, Washington, D. C., 1962.

Sierpiński, W., On Some Unsolved Problems of Arithmetics, Scripta Mathematica, Vol. 25, 1960.

Smarandache, Florentin, A Function in the Number Theory *, in Analele Univ. Timisoara, Vol. XVIII, Fasc. 1, pp. 79-88, 1980; M. R. 83c: 10008.

Smarandache, Florentin, Problèmes Avec et Sans ... Problèmes!, Somipress, Fès, Morocco, 1983; M.R. 84k: 00003.

Ulam, S., A Collection of Mathematical Problems, Interscience, New York, 1960.

Vinogradov, I. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Translated by Helen Popova, Pergamon Press, London and New York, 1955.

[Prezentat la Cea de-a 14-a Convenţie Anuală a Academiei Româno-Americane, care s-a desfăşurat la University of Southern California, Los Angeles, SUA, între 20-22 Aprilie 1989.
Un abstract al acestui articol a fost publicat de Prof.

Dr. Constantin Corduneanu, Department of Mathematics, University of Texas, Arlington, în "Libertas Mathematica", tomus IX, p. 175, The Grid, Arlington, Texas.
Alt abstract a fost publicat in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, 1986.]

1.3. Rezolvând probleme cu ajutorul acestei funcţii

Fie $n \geq 1$, $h \geq 1$, şi $a \geq 2$ numere întregi. Pentru ce valori ale lui a şi n, expresia (n+h)! este multiplu de a^n ? (O Generalizare a Problemei nr. 1270, Mathematics Magazine, Vol. 60, No. 3, June 1987, p. 179, propusă de Roger B. Eggleton, The University of Newcastle, Australia.)

Soluţie:

(Pentru h = 1 se obţine Problema 1270.)

§ 1.3.1. Introducere

Am construit o funcţie η (vezi [1]) având următoarele proprietăţi:

(a) Pentru fiecare întreg nenul n, $\eta(n)!$ este multiplu de n;

(b) $\eta(n)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea (a).

Este uşor de demonstrat că:

Lema 1.3.1. $(\forall)\ k, p \in N^*$, $p \neq 1$, k se scrie în mod unic sub forma:

$$k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)},$$

unde $a_{n_i}^{(p)} = (p^{n_i} - 1) / (p - 1)$, $i = 1, 2, \dots, \ell$,

$n_1 > n_2 > \dots > n_\ell > 0$ şi $1 \leq t_j \leq p - 1$, $j = 1, 2, \dots, \ell - 1$, $1 \leq t_\ell \leq p$, $n_i, t_i \in N$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, $\ell \in N^*$.

Am construit funcţiile η_p, p prim > 0, $\eta_p : N^* \to N^*$, astfel:

$$(\forall)\ n \in N^*,\ \eta_p\left(a_n^{(p)}\right) = p^n, \text{ şi}$$

$$\eta_p\left(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}\right) =$$

$$= t_1 \eta_p\left(a_{n_1}^{(p)}\right) + \dots + t_\ell \eta_p\left(a_{n_\ell}^{(p)}\right).$$

Desigur:

Lema 1.3.2.

(a) $(\forall)\ k \in N^*$, $\eta_p(k)! = \mathcal{M}p^k$.

(b) $\eta_p(k)$ este cel mai mic număr cu proprietatea (a). Acum construim altă funcţie:

$\eta : Z \setminus \{0\} \to N$ definită cupă cum urmează:

$$\begin{cases} \eta(\pm 1) = 0, \\ (\forall)\ n = \epsilon\, p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \text{ cu } \epsilon = \pm 1,\ p_i \text{ prime și} \\ p_i \neq p_j \text{ pentru } i \neq j, \text{ toți } \alpha_i \in N^*,\ \eta(n) = \\ = \max\limits_{1 \le i \le s} \{\eta_p\ (\alpha_i)\}. \end{cases}$$

Nu e dificil să demonstrăm că η are proprietățile cerute în & 1.3.1.

& 1.3.2. Fie $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, cu toți $\alpha_i \in N^*$ și toți p_i prime distincte. Din teorema anterioară rezultă că:

$$\eta(a) = \max_{1 \le i \le s} \{n_{p_i}\ (\alpha_i)\} = \eta_p\ (\alpha)\ \text{(prin notație)}.$$

Deci $\quad \eta(a) = \eta(p^\alpha),\ \eta(p^\alpha)\ ! = Mp^\alpha.$

Se știe că:

$$(t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell\, p^{n_\ell})\ ! = Mp^{t_1 \frac{p^{n_1}-1}{p-1} + \dots + t_\ell \frac{p^{n_\ell}-1}{p-1}}.$$

Punem:

$$t_1\, p^{n_1} + \dots + t_\ell\, p^{n_\ell} = n + h$$

şi $t_1 \dfrac{p^{n_1}-1}{p-1} + \dots + t_\ell \dfrac{p^{n_\ell}-1}{p-1} = \alpha n.$

De unde

$$\frac{1}{\alpha}\left[\frac{p^{n_1}-1}{p-1} + \dots + t_\ell \frac{p^{n_\ell}-1}{p-1}\right] \geq t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell} - h$$

sau

$$(1) \quad \alpha (p - 1) h \geq (\alpha p - \alpha - 1) [t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell}] + + (t_1 + \dots + t_\ell).$$

În această condiţie, luăm $n_0 = t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell} - h$

(vezi Lema 1.3.1), deci $n = \begin{cases} n_0, & n_0 > 0; \\ 1, & n_0 \leq 0 \end{cases}.$

Considerând că a = 2 este dat, avem un număr finit de n-uri. Există un număr infinit de n-uri dacă şi numai dacă $\alpha p - \alpha - 1 = 0$, sau $\alpha = 1$ şi $p = 2$, sau a = 2.

& 1.3.3. Caz particular

Dacă h = 1 şi a = 2, deoarece

$$t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} \geq p^{n_\ell} > 1$$

şi $t_1 + \ldots + t_\ell \geq 1$, rezultă din (1) că:

(1') $(\alpha p - \alpha) > (\alpha p - \alpha - 1) \cdot 1 + 1 = \alpha p - \alpha$,

care-i imposibil. Dacă h = 1 şi a = 1 atunci $\alpha = 1$, $p = 2$,

sau

(1") $1 \geq t_1 + \ldots + t_\ell$,

deci $\ell = 1$, $t_1 = 1$ de unde $n = t_1 p^{n_1} + \ldots + t_\ell p^{n_\ell} - h =$

$= 2^{n_1} - 1$, $n_1 \in N^*$ (soluţia Problemei 1270).

Exemplul 1.3.1. Fie h = 16 şi a = $3^4 \cdot 5^2$. Să se găsească n astfel încât

$$(n + 16)! = M\ 2025^n.$$

Soluţie

$\eta(2025) = \max(\eta_3(4), \eta_5(2)) = \max(9, 10) = 10 =$
$= \eta_5(2) = \eta(5^2)$. De unde $\alpha = 2$, $p = 5$. Din (1) rezultă:

$$128 \geq 7[t_1 5^{n_1} + \ldots + t_\ell 5^{n_\ell}] + t_1 + \ldots + t_\ell.$$

Deoarece $5^4 > 128$ şi $7[t_1 5^{n_1} + \ldots + t_\ell 5^{n_\ell}] < 128$ rezultă că $\ell = 1$,

$$128 \geq 7 t_1 5^{n_1} + t_1 ,$$

de unde $n_1 \leq 1$, sau $n_1 = 1$, şi $t_1 = 1, 2, 3$. Atunci $n_0 = t_1 5 - 16 < 0$, deci luăm $n = 1$.

Exemplul 1.3.2.

$(n + 7)! = \dot{M}\, 3^n$ când $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

$(n + 7)! = \dot{M}\, 5^n$ când $n = 1$.

$(n + 7)! = \dot{M}\, 7^n$ când $n = 1$.

Dar $(n + 7)! \neq \dot{M}\, p^n$, pentru p prim > 7, $(\forall)$ $n \in N^*$.

$(n + 7)! = \dot{M}\, 2^n$ când

$$n_0 = t_1 2^{n_1} + \ldots + t_\ell 2^{n_\ell} - 7,$$

$$t_1, \ldots, t_{\ell-1} = 1,$$

$$1 \leq t_\ell \leq 2, \; t_1 + \ldots + t_\ell \leq 7$$

şi
$$n = \begin{cases} n_0, & n_0 > 0; \\ 1, & n_0 \leq 0. \end{cases}$$

etc.

Exerciţii pentru cititori:

Dacă $n \in N^*$, $a \in N^* \setminus \{1\}$, să se găsească valorile lui a şi n astfel încât:

$(n + 7)!$ să fie multiplu de a^n.

Câteva probleme deschise (vezi [2])

Să se rezolve/studieze următoarele ecuaţii diofantice:

(1) $\eta(x) \cdot \eta(y) = \eta(x + y)$.

(2) $\eta(x) = y!$ (o soluţie: $x = 9$, $y = 3$).

(3) Conjectură: ecuaţia $\eta(x) = \eta(x + 1)$ nu are nici o soluţie.

Referinţe:

[1] Florentin Smarandache, "A Function in the Number Theory," Analele Univ. Timisoara, Fasc. 1, Vol. XVIII, pp. 79-88, 1980, MR: 83c: 10008.

[2] Idem, Un Infinity of Unsolved Problems Concerning a Function in Number Theory, International Congress of Mathematicians, Univ. of Berkeley, CA, August 3-11, 1986.

[Un comentariu dspre această generalizare a fost publicat în "Mathematics Magazine", Vol. 61, No. 3, June 1988, p. 202: "Smarandache a considerat problema generală de găsire a unor întregi pozitivi n, a, şi k, astfel încât $(n + k)!$ să fie multiplu de a^n. De asemenea, pentru întregi pozitivi p şi k, cu p prim, el a găsit o formulă de calculare a celui mai mic întreg $f(k)$ cu proprietatea că $(f(k))!$ este multiplu de p^k."]

1.4. Câteva ecuaţii liniare implicând această funcţie

Am construit o funcţie η care asociază fiecărui întreg nenul m cel mai mic număr pozitiv n astfel încât n! este multiplu de m.

(a) Să se rezolve ecuaţia (x) = n, unde $n \in N$.

*(b) Să se rezolve ecuaţia (mx) = x, unde $m \in Z$.
Discuţie.

(c) Fie $\eta^{(i)} = \eta \circ \eta \circ \ldots \circ \eta$ de i ori. Să se arate că există un k pentru care

$$\eta^{(k)}(m) = \eta^{(k+1)}(m) = n_m, \text{ pentru } m \in Z^*\setminus\{1\}.$$

**Să se găsească n_m şi cel mai mic k cu această proprietate.

Soluţie

(a) Cazurile n = 0, 1 sunt triviale.

Notăm secvenţa crescătoare de numere prime mai mici sau egale cu n prin $p_1, p_2, \ldots, p_k$, şi

$$\beta_t = \sum_{h\geq 1} [n/p_t^h], \quad t = 1, 2, \ldots, k;$$

unde [y] este cel mai mare întreg mai mic sau egal cu y.

Fie $n = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_s}^{\alpha_{i_s}}$, unde toţi p_{i_j} sunt numere prime distincte şi toţi α_{i_j} sunt din N.

Desigur avem că $n \leq x \leq n!$

Astfel $x = p_1^{\sigma_1} \dots p_k^{\sigma_k}$ unde $0 \leq \sigma_t \leq \beta_t$ pentru toţi $t = 1, 2, \dots, k$ şi există cel puţin un $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ pentru care

$$\sigma_{i_j} \in \{\beta_{i_j}\ \beta_{i_j}^{-1}, \dots, \beta_{i_j} - \alpha_{i_j} + 1\}.$$

În mod clar n! este multiplu de x, şi este cel mai mic.
(b) Vezi de asemenea [1]. Considerăm $m \in N^*$.

Lema 1.4.1. $\eta(m) \leq m$, şi $\eta(m) = m$ dacă şi numai dacă $m = 4$ sau m este prim.

Desigur m! este multiplu al lui m.

Dacă $m \neq 4$ şi m nu este prim, lema este echivalentă cu: există m_1, m_2 astfel încât $m = m_1 \cdot m_2$ cu $1 < m_1 \leq m_2$ şi $(2 m_2 < m$ or $2 m_1 < m)$. De unde $\eta(m) \leq 2 m_2 < m$, respectiv $\eta(m) \leq \max\{m_2, 2m\} < m$.

Lema 1.4.2. Fie p prim ≥ 5. Atunci $\eta(p x) = x$ dacă şi numai dacă x este prim > p, ori x = 2p.

Demonstraţie. $\eta(p) = p$. Deci $x > p$.

În mod analog: x nu este prim şi $x \neq 2p \Rightarrow x = x_1 x_2$, $1 < x_1 \leq x_2$ şi $(2 x_2 < x_1, x_2 \neq p_1$, şi $2 x_1 < x) \Rightarrow \eta(p x) \leq$

$\leq \max(p, 2x_2) < x$ respectiv $\eta(px) \leq \max(p, 2x_1, x_2)$
$< x$.

Observaţii:

$\eta(2x) = x - x = 4$ sau x este număr prim impar.

$\eta(3x) = x - x = 4, 6, 9$ sau x este număr prim > 3.

Lema 1.4.3. Dacă $(m, x) = 1$ atunci x este prim $\eta(m)$.

Desigur, $\eta(mx) = \max(\eta(m), \eta(x)) = \eta(x) = x$.
Şi $x \cdot \eta(m)$, deoarece dacă $x = \eta(m)$ atunci $m \cdot \eta(m)$ divide pe $\eta(m)!$ adică m divide pe $(\eta(m) - 1)!$ de unde $\eta(m) \leq \eta(m) -$
$- 1$.

Lema 1.4.4. Dacă x nu este prim atunci $\eta(m) < x \leq 2\eta(m)$
şi $x = 2\eta(m)$ dacă şi numai dacă $\eta(m)$ este prim.

Demonstraţie: Dacă $x > 2\eta(m)$ există x_1, x_2 cu $1 < x_1 \leq$
$\leq x_2$, $x = x_1 x_2$. Pentru $x_1 < \eta(m)$ avem că $(x - 1)!$ este multiplu de mx. Demonstraţie similară pentru celelalte cazuri.

Fie $x = 2\eta(m)$; dacă $\eta(m)$ nu este prim, atunci
$x = 2ab$, $1 < a \leq b$, dar produsul $(\eta(m) + 1)(\eta(m) +$
$+ 2) \ldots (2\eta(m) - 1)$ se divide la x.

Dacă $\eta(m)$ este prim, $\eta(m)$ divide pe m, de unde $m \cdot 2\eta(m)$ se divide cu $\eta(m)^2$, rezultă că $\eta(m \cdot 2\eta(m)) \geq 2 \cdot$
$\cdot \eta(m)$, dar $(\eta(m) + 1)(\eta(m) + 2) \ldots (2\eta(m))$ este multiplu de $2\eta(m)$, adică $\eta(m \cdot 2\eta(m)) = 2\eta(m)$.

Concluzie

Orice număr prim $x > \eta(m)$, este soluţie.

Dacă $\eta(m)$ este prim, atunci $x = 2\eta(m)$ este o soluţie.

*Dacă x nu e prim, $\eta(m) < x < 2\eta(m)$, şi x nu divide pe $(x-1)!/m$ atunci x este o soluţie (chestiune semi-deschisă). Dacă $m = 3$ se adaugă şi $x = 9$. (Nu mai există nici o altă soluţie.)

(c)

Lema 1.4.5. $\eta(a\,b) \leq \eta(a) + \eta(b)$.

Desigur, $\eta(a) = a'$ şi $\eta(b) = b'$ implică $(a' + b')! = b'!\,(b' + 1)\ldots(b' + a')$. Fie $a' \leq b'$. Atunci $\eta(ab) \leq a' + b'$, deoarece produsul unor a' întregi consecutivi este multiplu de a'!

Evident, dacă m este prim, atunci $k = 1$ şi $n_m = m$.

Dacă m nu este prim, atunci $\eta(m) < m$, de unde rezultă că există k pentru care $\eta^{(k)}(m) = \eta^{(k+1)}(m)$.

Dacă $m \neq 1$ atunci $2 \leq n_m \leq m$.

Lema 1.4.6. $n_m = 4$ ori n_m este prim.

Dacă $n_m = n_1 n_2$, $1 < n_1 \leq n_2$, atunci $\eta(n_m) < n_m$. Absurd. $n_m = 4$.

(**) Această chestiune rămâne deschisă.

Referinţă:

[1] F. Smarandache, A Function in the Number Theory, An. Univ. Timisoara, seria st. mat., Vol. XVIII, fasc. 1,

pp. 79-88, 1980; Mathematical Reviews: 83c: 10008.

[Publicat în revista "Gamma", Braşov, 1987.]

2. ALTĂ FUNCŢIE ÎN TEORIA NUMERELOR

În această lucrare definim o funcție L care ne va permite să generalizăm (separat sau simultan) câteva teoreme din Teoria Numerelor obținute de Wilson, Fermat, Euler, Gauss, Lagrange, Leibnitz, Moser și Sierpinski.

§ 2.1. Fie A mulțimea $\{m \in Z / m = \pm p^{\beta}, \pm 2 p^{\beta}$, p - prim impar, $\beta \in N^*$ sau $m = \pm 2^{\alpha}$, $\alpha = 0, 1, 2$ sau $m = 0\}$.

Fie $m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, cu $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha_i \in N^*$, $p_1, \dots, p_r$ numere prime pozitive distincte.

Considerăm funcția $L: Z^2 \to Z$,

$L(x, m) = (x - c_1) \dots (x - c_{\varphi(m)})$, unde $c_1, \dots, c_{\varphi(m)}$ sunt toate restricțiile modulo m, relativ prime cu m și φ este funcția Euler.

Dacă toate numerele prime distincte ce divid x și m simultan sunt $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$ atunci:

$L(x, m) \equiv \mp 1 \left(\bmod\ p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \right)$, când $m \in A$, respectiv $m \notin A$ și

$L(x, m) \equiv 0 \left(\bmod\ m \Big/ \left(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \right) \right)$. Pentru $d = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}$ și $m' = m / d$ găsim

$$L(x, m) \equiv \mp 1 + k_1^0 d \equiv k_2^0 m' \pmod m,$$

unde k_1^0, k_2^0 constituie o soluție particulară întreagă a ecuației diofantice $k_2 m' - k_1 d = \mp 1$ (semnele sunt alese după apartenența lui m la A).

Acest rezultat generalizează teorema Gauss $c_1 \dots c_{\varphi(m)} \equiv \mp 1 \pmod m$, când $m \in A$, respectiv $m \notin A$ (vezi [1]), care la rândul ei generalizează teorema Wilson p - prim $\Rightarrow (p - 1)! \equiv -1 \pmod p$.

Demonstrație:

Următoarele două leme sunt triviale:

Lema 2.1. Dacă $c_1, \ldots, c_{\varphi(p^\alpha)}$ sunt toate resturile modulo p^α relativ prime cu p^α, unde p este întreg și $\alpha \in N^*$, atunci pentru $k \in Z$ și $\beta \in N^*$ $k p^\beta - c_1, \ldots, k p^\beta - c_{\varphi(p^\alpha)}$ sunt deasemenea toate resturile modulo p^α, relativ prim cu p^α. Este suficient să demonstrăm că pentru $1 \le i \le \varphi(p^\alpha)$ avem $k p^\beta - c_i$ relativ prime cu p^α, ceea ce este evident.

Lema 2.2. Dacă $c_1, \ldots, c_{\varphi(m)}$ sunt toate resturile modulo m, relativ prime cu m și $p_i^{\alpha_i}$ divide m și $p_i^{\alpha_i+1}$ nu divide m, atunci $c_1, \ldots, c_{\varphi(m)}$ constituie $\varphi\left(m / p_i^{\alpha_i}\right)$ sisteme reduse de resturi modulo $p_i^{\alpha_i}$.

Lema 2.3. Dacă $c_1, \ldots, c_{\varphi(q)}$ sunt resturile modulo q relativ prime cu b și $(b, q) \sim 1$ atunci $b + c_1, \ldots, b + c_{\varphi(q)}$ conține un reprezentant al clasei $\hat{0}$ modulo q.

Desigur, deoarece $(b, q - b) \sim 1$ va exista $c_{i_0} = q - b$, deci $b + c_{i_0} = M_q$. De aici avem:

Teorema 2.1. Dacă $\left(x, m / \left(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}\right)\right) \sim 1$ atunci

$$(x - c_1)\ldots(x - c_{\varphi(m)}) \equiv 0 \left(\bmod\ m / \left(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}\right)\right)$$

Lema 2.4. Deoarece $c_1 \ldots c_{\varphi(m)} \equiv \mp 1 \pmod m$ rezultă că $c_1 \ldots c_{\varphi(m)} \equiv \mp 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $\forall$ i, când $m \in A$, respectiv $m \in A$.

Lema 2.5. Dacă p_i divide x și m simultan, atunci $(x + c_1)\ldots(x + c_{\varphi(m)}) \equiv \mp 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $m \in A$, respectiv $m \in A$. Desigur, din lemele 2 și 1, respectiv 4 avem:

$$(x - c_1)\ldots(x - c_{\varphi(m)}) \equiv c_1 \ldots c_{\varphi(m)} \equiv \mp 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Din lema 2.5 obținem:

Teorema 2.2. Dacă $p_{i_1} \dots p_{i_r}$ sunt toate numerele prime ce divid x și m simultan, atunci $(x + c_1)\dots(x + c_{\varphi(m)}) \equiv \mp 1 \pmod{p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}}$, când $m \in A$, respectiv $m \notin A$.

Din teoremele 1 și 2 rezultă $L(x, m) = \mp 1 + k_1 d = k_2 m'$ unde $k_1, k_2 \in Z$. Deoarece $(d, m') \sim 1$, ecuația diofantică $k_2 m' - k_1 d = \mp 1$ admite soluții întregi (necunoscutele fiind k_1, k_2). Astfel $k_1 = m' t - k_1^0$ și $k_2 = dt - k_2^0$, cu $t \in Z$ și k_1^0, k_2^0 o soluție întreagă particulară a ecuației. Astfel:

$$L(x, m) \equiv \mp 1 - m'dt - k_1^0 d \equiv \mp 1 - k_1^0 d \pmod m$$

sau

$$L(x, m) \equiv k_2^0 m' \pmod m.$$

& 2.2. Aplicații

1. Lagrange a extins teorema lui Wilson astfel:

" dacă p este prim, atunci $x^{p-1} - 1 \equiv (x - 1)(x + 2) \dots (x + p-1) \pmod p$".

Vom extinde acest rezultat astfel:

Oricare ar fi $m = 0, \pm 4$ avem pentru $x^2 + s^2 = 0$ **și dacă m e prim atunci $(x, m) \neq m$;**

$$x^{\varphi(m_s)+s} - x^s \equiv (x+1)(x+2)\dots(x+|m|-1) \pmod m,$$ unde m_s și s sunt obținute din algoritmul:

$$(0) \begin{cases} x = x_0 d_0; & (x_0, m_0) \sim 1 \\ m = m_0 d_0; & d_0 \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_0 = d_0^1 d_1; & (d_0^1, m_1) \sim 1 \\ m_0 = m_1 d_1; & d_1 \neq 1 \end{cases}$$

. . . .

$$(s-1) \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^1 d_{s-1}; & (d_{s-2}^1, m_{s-1}) \sim 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1}; & d_{s-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^1 d_s; & (d_{s-1}^1, m_s) \sim 1 \\ m_{s-1} = m_s d_s; & d_s = 1 \end{cases}$$

(vezi [3] sau [4]). Pentru m pozitiv prim, avem $m_s = m$, $s = 0$ și $\varphi(m) = m - 1$, adică Lagrange.

2. L. Moser a enunțat următoarea teoremă:

" dacă p este prim atunci $(p - 1)!\, a^p + a = M\, p$" și Sierpinski (vezi [2], pag 57) " dacă p este prim atunci $a^p + (p - 1)!\, a = M\, p$" care reunesc teoremele Wilson și Fermat în una singură.

Funcția L și algoritmul din §2 ne vor ajuta să le generalizăm astfel: " dacă a și m sunt întregi, $m \neq 0$ și $c_1, \dots c_{\varphi(m)}$ sunt toate resturile modulo m, relativ prime cu m, atunci:

$$c_1 \dots c_{\varphi(m)}\, a^{\varphi(m_s)+s} - L(0, m)\, a^s = M\, m,$$

respectiv

$$- L(0, m)\, a^{\varphi(m_s)+s} + c_1 \dots c_{\varphi(m)}\, a^s = M\, m,$$

sau mai mult:

$$(x - c_1) \dots (x - c_{\varphi(m)})\, a^{\varphi(m_s)+s} - L(x, m)\, a^s = M\, m,$$

respectiv

$$- L(x, m)\, a^{\varphi(m_s)+s} + (x - c_1) \dots (x - c_{\varphi(m)})\, a^s = M\, m,$$

care reunesc Fermat, Euler, Wilson, Lagrange și Moser (respectiv Sierpinski).

3. Autorul a mai obținut o generalizare a rezultatelor lui Moser și Sierpinski (vezi [6], problema 7. 140, pag 173-174) astfel: " dacă m este întreg pozitiv, $m \neq 0,\ 4$ și a întreg, atunci $(a^m - a)\,(m - 1)! = Mm$ " reunind teoremele Wilson și Fermat în alt mod.

4. Leibnitz a enunțat că "dacă p este prim atunci $(p - 2)! \equiv 1 \pmod p$ "; noi considerăm " $c_i < c_{i+1} \pmod m$ " dacă $c'_i < c'_{i+1}$, unde $0 \leq c'_i < |m|$, $0 \leq c'_{i+1} < |m|$, și $c_i \equiv c'_i \pmod m$; $c_{i+1} \equiv c'_{i+1} \pmod m$; se vede ușor că dacă $c_1, c_2, \dots c_{\varphi(m)}$ sunt resturile modulo m, relativ prime cu m $(c_i < c_{i+1} \pmod m),\ \forall\, i,\ m \neq 0)$ atunci $c_1 c_2 \dots c_{\varphi(m)-1} \equiv \pm 1 \pmod m$, când $m \in A$, respectiv $m \notin A$, deoarece $c_{\varphi(m)} \equiv -1 \pmod m$.

Referințe:

1 Lejeune-Dirichlet, "Vorlesungen uber Zahlentheorie", 4te Auflage, Braunschweig; 1894, §38.

2 Sierpinski, Waclaw, " Ce știm și ce nu știm despre numerele prime", Ed. Științifică, București, 1966.

3 Smarandache. Florentin. "O generalizare a teoremei lui Euler referitoare la congruente". Bulet. Univ. Brasov. seria c. Vol. XXIII. pp. 7-12. 1981: vezi Mathematical Reviews: 84 j: 10006.

4 Smarandache, Florentin. "Généralisations et Généralités. " Ed. Nouvelle. Fes. Morocco. pp. 9-13. 1984.

5 Smarandache, Florentin, "A function in the number theory," An. Univ. Timișoara, seria șt. mat.. Vol. XVIII. fasc. 1 pp. 79-88. 1980: vezi M.R.: 83c: 10008.

6 Smarandache. Florentin. "Problemes avec et sans ... problemes!", Somipress. Fes. Morocco, 1983; vezi M.R.: 84k: 00003.

3. FUNCŢII PRIME ÎN TEORIA NUMERELOR

& 3.1. Vom construi o clasă de funcţii, definite astfel:

$$P_1 : N \dashrightarrow \{0, 1\},\ P_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă n este prim;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

De exemplu $P_1(2) = P_1(3) = P_1(5) = \ldots = 0$,
pe când $P_1(0) = P_1(1) = P_1(4) = \ldots = 1$.
În general, pentru un întreg dat $k \geq 1$, se poate defini:
$P_k : N^k \dashrightarrow \{0, 1\}$,

$$P_k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n_1, n_2, \ldots, n_k \text{ sunt toate prime;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Mai departe, să studiem în ce condiţii $P_k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 0$, sau să determinăm condiţii necesare şi suficiente astfel încât n întregi, primi între ei doi câte doi, să fie simultan primi.

Aceasta generalizează teoremele lui V. Popa [3], I. Cucurezeanu ([1], p. 165), Clement, S. Patricio [2], etc.

În mod particular această Teoremă Generală oferă diferite caracterizări pentru numerele prime gemene, cuadruple,

etc.

& 3.2. Introducere. Este evidentă următoarea

Lema 3.1. Fie A, B întregi nenuli. Atunci:

$AB \equiv 0 \pmod{pB}$ - $A \equiv 0 \pmod{p}$ - A/p este număr întreg.

Lema 3.2. Fie $(p,q) - 1$, $(a,p) - 1$, $(b,q) - 1$.

Atunci:

$A \equiv 0 \pmod{p}$ şi $B \equiv 0 \pmod{q}$ - $aAq + bBp \equiv 0$ (mod pq) - $aA + bBp/q \equiv 0 \pmod{p}$ - $aA/p + bB/q$ este număr întreg.

Demonstraţie:

Prima echivalenţă:

Avem $A = K_1p$ şi $B = K_2q$, cu $K_1, K_2 \in Z$, deci

$aAq + bBp = (aK_1 + bK_2)\,pq$.

Reciproc: $aAq + bBp = Kpq$, cu $K \in Z$, rezultă

că $aAq \equiv 0 \pmod p$ şi $bBp \equiv 0 \pmod q$, dar din presupunerea anterioară obţinem $A \equiv 0 \pmod p$ şi $B \equiv 0 \pmod q$.

A doua şi a treia echivalenţă rezultă din lema 3.1.

Prin inducţie extindem această lemă la

Lema 3.3. Fie $p_1, \dots, p_n$ coprime două câte două, şi fie $a_1, \dots, a_n$ numere întregi astfel încât $(a_i, p_i) - 1$ pentru orice i. Atunci:

$$A_1 \equiv 0 \pmod{p_1}, \dots, A_n \equiv 0 \pmod{p_n} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} a_i A_i \prod_{j \neq i} p_j \equiv 0 \pmod{p_1 \dots p_n} -$$

$$- (P/D) \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i A_i / p_i) \equiv 0 \pmod{P/D},$$

unde $P = p_1 \dots p_n$ şi D este un divizor al lui p

$$- \sum_{i=1}^{n} a_i A_i / p_i \text{ este număr întreg.}$$

& 3.3. Din această lemă putem să deducem imediat o

TEOREMĂ GENERALĂ:

Fie P_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, numere întregi coprime două câte două, şi fie $r_1, \dots, r_n$, $a_1, \dots, a_n$ numere întregi astfel încât a_i să fie coprim cu r_i pentru orice i.

Se consideră următoarele condiţii:

(i)

$p_{i_1}, \ldots, p_{i_{m_1}}$ sunt simultan prime dacă şi numai dacă $c_i \equiv 0 \pmod{r_i}$, pentru orice i.

Atunci:

Numerele p_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, sunt simultan prime dacă şi numai dacă

$$(*) \quad (R/D) \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i / r_i) \equiv 0 \pmod{R/D},$$

unde $R = \prod_{i=1}^{n} r_i$ şi D este un divizor al lui R.

Observaţie:

Adesea în condiţiile (i) modulul r_i este egal cu $\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}$, ori cu un divizor al acestuia, şi în acest caz relaţia Teoremei Generale devine:

$$(P/D) \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i / \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}) \equiv 0 \pmod{P/D},$$

unde

$$P = \prod_{i,j=1}^{n,m_i} p_{ij} \text{ şi D este un divizor al lui P.}$$

Corolarii:

Obţinem uşor că ultima relaţie este echivalentă cu:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i \quad (P/\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}) \equiv 0 \pmod{P},$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i c_i / \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}) \text{ este număr întreg,}$$

etc.

Restricţiile impuse pentru numerele p_{ij} din Teorema Generală sunt foarte largi, deoarece dacă ar fi două numere distincte necoprime, atunci cel puţin unul dintre acestea n-ar fi prim, deci cele $m_1 + \dots + m_n$ numere n-ar mai putea fi prime toate (simultan).

Teorema Generală are multe variante, în concordanţă cu valorile atribuite parametrilor $a_1, \dots, a_n$, şi $r_1, \dots, r_m$, precum şi parametrului D, dar şi în concordanţă cu congruenţele $c_1, \dots, c_n$ care caracterizează fie numai un număr prim fie mai multe în acelaşi timp. Putem porni de la teoreme (condiţii c_i), care caracterizează un singur număr prim [vezi Wilson, Leibniz, Smarandache [4], sau Simionov (p este prim dacă şi numai dacă

$(p-k)!(k-1)!-(-1)^k \equiv 0 \pmod p$, când $p \geq k \geq 1$; aici, este preferabil să luăm $k = \lfloor (p+1)/2 \rfloor$, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă cel mai mare întreg $\leq x$, pentru ca numărul $(p-k)!(k-1)!$ să fie cât mai mic posibil] pentru a obţine, cu ajutorul Teoremei Generale, condiţiile c_j', care caracterizează mai multe numere prime în mod simultan. După aceea, din condiţiile c_i, c_j', folosind Teorema Generală din nou, obţinem condiţii noi c_h'' care caracterizează numerele prime în mod simultan. Şi această metodă poate fi continuată în mod analog.

Observaţii

Fie $m_i = 1$ iar c_i reprezintă teorema lui Simionov pentru orice i.

(a) Dacă $D = 1$ rezultă teorema lui V. Popa, care generalizează teorema lui Cucurezeanu, şi care la rândul ei generalizează teorema lui Clement.

(b) Dacă $D = P/p_2$ şi alegând în mod convenient parametrii a_i, k_i pentru $i = 1, 2, 3$, rezultă teorema lui S. Patricio.

Câteva exemple:

3.1. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numere întregi pozitive > 1, coprime două câte două, şi $1 \leq k_i \leq p_i$ pentru orice i. Atunci:

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt în mod simultan prime dacă şi numai dacă:

(T) $$\sum_{i=1}^{n} [(p_i-k_i)!(k_i-1)! - (-1)^{k_i}] \cdot \prod_{j \neq i} p_j \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

ori

(U) $$\left(\sum_{i=1}^{n} [(p_i-k_i)!(k_i-1)!-(-1)^{k_i}] \prod_{j \neq i} p_j\right)/(p_{s+1} \ldots p_n) \equiv$$

$$\equiv 0 \pmod{p_1 \ldots p_s}$$

ori

(V) $$\sum_{i=1}^{n} [(p_i-k_i)!(k_i-1)!-(-1)^{k_i}]p_j/p_i \equiv 0 \pmod{p_j}$$

ori

(W) $\sum_{i=1}^{n} [(p_i-k_i)!(k_i-1)!-(-1)^{k_i}]/p_i$ este un număr întreg.

3.2. Alt exmplu, folosind altă relaţie (prima teoremă din [4]): p este un număr prim pozitiv dacă şi numai dacă $(p-3)!-(p-1)/2 \equiv 0 \pmod{p}$.

$$\sum_{i=1}^{n} [(p_i-3)!-(p_i-1)/2]p_1/p_i \equiv 0 \pmod{p_1}.$$

3.3. Numerele impare p şi p + 2 sunt prime gemene dacă şi numai dacă:

$$(p-1)!(3p+2) + 2p + 2 \equiv \pmod{p(p+2)}$$

sau

$$(p-1)!(p-2)-2 \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$$

sau

$[(p-1)! + 1] / p + [(p-1)!\, 2 + 1] / (p+2)$ este un număr întreg.

Aceste caracterizări de numere prime gemene diferă de cea a lui Clement: $((p-1)!4 + p + 4 \equiv 0 \pmod{p(p+2)})$.

3.4. Fie $(p,p+k) - 1$, atunci p şi p + k sunt prime în mod simultan dacă şi numai dacă $(p-1)!(p+k) + (p+k-1)!\, p + 2p + k \equiv 0 \pmod{p(p+k)}$, relaţie care diferă de cea a lui Cucurezeanu ([1], p. 165): $k.k!\,[(p-1)!+1] + [k!-(-1)^k]\, p \equiv 0 \pmod{p(p+k)}$).

3.5. Iată o caracterizare de numere prime cuadruple p, p + 2, p + 6, p + 8: $[(p-1)!+1]/p + [(p-1)!2!+1]/(p+2) + [(p-1)!6!+1]/(p+6) + [(p-1)!8!+1]/(p+8)$ este un întreg.

3.6. Pentru p - 2, p, p + 4 numere întregi coprime două câte două găsim relaţia: $(p-1)!+p[(p-3)!+1]/$

$/(p-2)+p[(p+3)!+1]/(p+4) \equiv -1 \pmod p$, **care diferă de cea a lui Patricio** $(8[(p+3)!/(p+4)] + 4[(p-3)!/(p-2)] \equiv \equiv -11 \pmod p)$.

Referinţe:

[1] Cucurezeanu, I.--Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.

[2] Patrizio, Serafino--Generalizzazione del teorema di Wilson alle terne prime, Enseignement Math., Vol. 22(2), nr. 3-4, pp. 175-184, 1976.

[3] Popa, Valeriu--Asupra unor generalizări ale teoremei lui Clement, Studii şi cercetari matematice, vol. 24, nr. 9, pp. 1435-1440, 1972.

[4] Smarandache, Florentin--Criterii ca un număr natural să fie prim, Gazeta Matematică, nr. 2, pp. 49-52; 1981; see Mathematical Reviews (USA): 83a: 10007.

[Prezentat la Cea de-a 15-a Convenţie Anuală a Academiei Româno-Americane, care a avut loc în Montréal, Québec, Canada, între 14-18 iunie, 1990, la École Polytechnique de Montréal.]

4. ASUPRA FUNCŢIEI TOTIENT A LUI EULER ÎN TEORIA NUMERELOR

Funcţia totient (ori phi-) a lui Euler este definită astfel: pentru orice întreg x, $\phi(x)$ este numărul de întregi primi cu x şi mai mici decât x; sau numărul claselor reduse de resturi modulo x.
În continuare vom studia o conjectură referitoare la această funcţie.

4.1. O proprietate a unui contraexemplu al conjecturei lui Carmichael referitoare la funcţia totient a lui Euler

Conjectura lui Carmichael este următoarea: "Ecuaţia $\varphi(x) = n$ nu poate avea o soluţie unică, $(\forall)$ $n \in N$; unde φ este funcţia lui Euler". R. K. Guy a expus în [1] câteva rezultate asupra acesteia: Carmichael însuşi a demonstrat ca dacă n_0 nu verifică conjectura, atunci $n_0 > 10^{37}$; V. L. Klee [2] a îmbunătăţit rezultatul la $n_0 > 10^{400}$, şi Masai & A. Valette [3] l-a mărit la 10^{10000}, C. Pomerance [4] scris despre aceasta de asemenea.

În lucrarea de faţă vom demonstra că ecuaţia $\varphi(x) = n$ admite un număr finit de soluţii, vom determina forma generală a acestor soluţii, şi vom demonstra că dacă x_0 este soluţie unică a ecuaţiei de mai sus (pentru un n fixat), atunci x_0 este multiplu de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2$ şi din [3] $x_0 > 10^{10000}$.

& 4.1.1. Fie x_0 o soluţie a ecuaţiei $\varphi(x) = n$.
Se consideră n fixat. Încercăm să construim altă soluţie $y_0 \neq x_0$.

Prima metodă:

Descompunem pe $x_0 = a \cdot b$, cu a, b întregi, astfel încât $(a, b) = 1$; căutăm un $a' \neq a$ astfel încât $\varphi(a') = \varphi(a)$ şi $(a', b) = 1$; rezultă că $y_0 = a' \cdot b$.

A doua metodă:

fie $x_0 = q_1^{\beta_1} \ldots q_r^{\beta_r}$, cu toţi $\beta_i \in N^*$, şi q_1, $\ldots$, q_r sunt numere prime distincte două câte două; căutăm un întreg q astfel încât $(q, x_0) = 1$ şi $\varphi(q)$ divide pe $x_0/(q_1 \ldots q_r)$; atunci $y_0 = x_0 q/\varphi(q)$.

Observăm imediat că putem lua pe q prim. Autorul conjecturează că pentru orice întreg $x_0 \geq 2$ este posibil să găsim, cu ajutorul uneia dintre aceste metode, un $y_0 \neq x_0$ astfel încât $\varphi(y_0) = \varphi(x_0)$.

Lema 4.1.1. Ecuaţia $\varphi(x) = n$ admite un număr finit de soluţii $(\forall)\ n \in N$.

Demonstraţie:

Cazurile n = 0, 1 sunt triviale. Considerăm n fixat, $n \geq 2$. Fie $p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leq n + 1$ secvenţa numerelor prime. Dacă x_0 este o soluţie a ecuaţiei anterioare, atunci x_0 are forma $x_0 = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, cu toţi $\alpha_i \in N$. Fiecare α_i este limitat, deoarece:

$$(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots, s\},\ (\exists)\ a_i \in N : p_i^{a_i} \geq n .$$

De unde $0 \leq \alpha_i \leq a_i + 1$, pentru orice i. Astfel, găsim o limită extinsă pentru numărul de soluţii: $\prod_{i=1}^{s} (a_i + 2)$.

Lema 4.1.2. Orice soluţie a acestei ecuaţii este de forma (1) sau (2):

$$x_0 = n \cdot \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\epsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s}{p_s-1}\right)^{\epsilon_s} \in Z,$$

unde, pentru $1 \leq i \leq s$, avem $\epsilon_i = 0$ dacă $\alpha_i = 0$, ori $\epsilon_i = 1$ dacă $\alpha_i = 0$.

$$\text{Desigur},\ n = \varphi(x_0) = x_0\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{\epsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s-1}{p_s}\right)^{\epsilon_s},$$

de unde rezultă a doua formă a lui x_0.

Din (2) găsim altă limită pentru numărul de soluţii: $2^s - 1$, deoarece fiecare ϵ_i are două valori numai, şi cel puţin una nu este egală cu zero.

& 4.1.3. Presupunem că x_0 este o soluţie unică a acestei ecuaţii.

Lema 4.1.3. x_0 este multiplu de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2$.

Demonstraţie:

Aplicăm a doua metodă. Deoarece $\varphi(0) = \varphi(3)$ şi $\varphi(1) = \varphi(2)$ luăm $x_0 \geq 4$.

Dacă $2 \nmid x_0$ atunci există $y_0 = 2x_0 \cdot x_0$ astfel încât $\varphi(y_0) = \varphi(x_0)$, deci $2 \mid x_0$; dacă $4 \nmid x_0$ atunci putem lua $y_0 = x_0/2$.

Dacă $3 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 3x_0/2$, deci $3 \mid x_0$; dacă $9 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 2x_0/3$, deci $9 \mid x_0$; de unde $4 \cdot 9 \mid x_0$.

Dacă $7 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 7x_0/6$, deci $7 \mid x_0$; dacă $49 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 6x_0/7$, deci $49 \mid x_0$; de unde $4 \cdot 9 \cdot 49 \mid x_0$.

Dacă $43 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 43x_0/42$, deci $43 \mid x_0$; dacă $43^2 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 42x_0/43$, deci $43^2 \mid x_0$; de unde $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 43^2 \mid x_0$.

Astfel $x_0 = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 7^{\gamma_3} \cdot 43^{\gamma_4} \cdot t$, cu toţi $\gamma_i \geq 2$ şi $(t, 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43) - 1$, şi $x_0 > 10^{10000}$ deoarece $n_0 > 10^{10000}$.

& 4.3. Fie $\gamma_1 \geq 3$. Dacă $5 \nmid x_0$ atunci $5x_0/4 = y_0$, deci $5/x_0$; dacă $25 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 4x_0/5$, de unde $25 \mid x_0$.

Construim mulţimea recurentă M de numere prime:

(a) elementele $2, 3, 5 \in M$;

(b) dacă elementele distincte impare $e_1, \ldots, e_n \in M$ şi $b_m = 1 + 2^m \cdot e_1 \ldots e_n$ este prim, cu m = 1 sau m = 2, atunci $b_m \in M$;

(c) orice element aparţinând lui M este obţinut prin folosirea (de un număr finit de ori) numai a regulilor (a) sau (b).

Autorul conjecturează că M este infinit, ceea ce rezolvă acest caz, deoarece rezultă că există un număr infinit de numere prime care divid pe x_0. Care-i absurd. De exemplu: 2,

3, 5, 7, 11, 13, 23, 29, 31, 43, 47, 53, 61, ... aparţin lui M.

*

Metoda din & 4.3. poate fi continuată ca un graf arbore (pentru $\gamma_2 \geq 3$, apoi $\gamma_3 \geq 3$ etc.), dar ramificaţiile sale sunt foarte multe ... .

Referinţe:

[1] R. K. Guy, Monthly unsolved problems 1969-1983, Amer. Math. Monthly, Vol. 90, No. 10/1983, p. 684.

[2] V. L. Klee, Amer. Math. Monthly 76/(969), p. 288.

[3] P. Masai & A. Valette, A lower bound for a counter-example to Carmichaël's conjecture, Boll. Unione Mat. Ital. (6)A_1 (1982), pp. 313-316.

[4] C. Pomerance, Math. Reviews: 49:4917.

4.2. Altă proprietate a unui contraexemplu la Conjectura lui Carmichael referitoare la funcţia totient a lui Euler

Carmichael a conjecturat că:

$(\forall)\ n \in N$, $(\exists)\ m \in N$, cu $m \neq n$, pentru care $\varphi(n) = \varphi(m)$, unde φ este funcţia totient a lui Euler.

Există multe lucrări asupra acesteia, dar autorul citează numai pe cele care l-au influenţat, în special cea a lui Klee.

Fie n un număr care contrazice conjectura lui Carmichael. Grosswald a arătat că n este un multiplu de 32, Donnelly a împins rezultatul mai departe arătând că n este multiplu de 2^{14}, şi Klee că este multiplu de $2^{42} \cdot 3^{47}$, Smarandache a demonstrat că este multiplu de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2$.
Masai şi Valette au limitat pe $n > 10^{10000}$.

În această notă vom extinde aceste rezultate la: n este multiplu al unui produs de foarte multe numere prime.
Construim următoarea mulţime recurentă M:

(a) elementele $2, 3 \in M$;

(b) dacă elementele distincte $2, 3, q_1, \ldots, q_r \in M$, şi $p = 1 + 2^a \cdot 3^b \cdot q_1 \ldots q_r$ este prim, unde $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 41\}$ şi $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 46\}$, atunci $p \in M$; $r \geq 0$;

(c) orice element aparţinând lui M este obţinut numai prin folosirea (de un număr finit de ori) a regulilor (a) şi (b).

Desigur toate elementele din M sunt prime.

Fie n un multiplu de $2^{42} \cdot 3^{47}$;

Dacă $5 \nmid n$ atunci există $m = 5n/4 \neq n$ astfel încât $\varphi(n) = \varphi(m)$; deci $5 \mid n$; de unde $5 \in M$;

Dacă $5^2 \nmid$ atunci există $m = 4n/5 \neq n$ cu proprietatea cerută; deci $5^2 \mid n$;

În mod analog, dacă $7 \nmid n$ putem să luăm $m = 7n/6 \neq n$, deci $7 \mid n$; dacă $7^2 \nmid n$ putem să luăm $m = 6n/7 \neq n$; hence de unde $7 \in M$ și $7^2 \mid n$; etc.

Metoda continuă până nu se mai poate adăuga nici un alt număr prim la M, prin construcția anterioară. De exemplu, din cele 168 numere prime mai mici decât 1000, numai 17 nu aparțin lui M (și anume: 101, 151, 197, 251, 401, 491, 503, 601, 607, 677, 701, 727, 751, 809, 883, 907, 983); toate celelalte 151 de numere prime aparțin lui M.

Notă: dacă $M = \{2, 3, p_1, p_2, \ldots, p_s, \ldots\}$, atunci n este multiplu de $2^{42} \cdot 3^{47} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_s^2 \cdots$, Din acest exemplu, M conține cel puțin 151 de elemente, deci $s \geq 149$.

Dacă M este infinit, atunci nu există nici un contraexemplu n, deci conjectura lui Carmichael este rezolvată. (Autorul conjecturează că M este infinit.) Cu ajutorul unui computer se poate găsi un număr foarte mare de prime care divid n -- folosind metoda de construcție a lui M, și testând fiecare prim p dacă p - 1 este un produs de prime numai din M.

Referințe:

[1] R. D. Carmichaël, Note on Euler's φ function, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922) 109-110.

[2] H. Donnelly (tbp), On a problem concerning Euler's phi-function, Amer. Math. Monthly 80 (1973) 1029-1031.

[3] E. Grosswald, Contribution to the theory of Euler's function φ(x), Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) 337-341.

[4] R. K. Guy, Monthly research problems 1969-73, Amer. Math. Monthly 80 (1973) 1120-1128.

[5] R. K. Guy, Monthly unsolved problems 1969-1983, Amer. Math. Monthly 90 (1983) 683-690.

[6] R. K. Guy, Unsolved problems in number theory, Springer-Verlag, 1981, problem B39, 53.

[7] V. L. Klee, On a conjecture of Carmichaël, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 1183-1186.

[8] V. L. Klee, Is there an n for which φ(x) = n has a unique solution?, Amer. Math. Monthly 76 (1969) 288-289.

[9] P. Masai & A. Valette, A lower bound for a counterexample to Carmichaël's conjecture, Boll. Unione Mat. Ital. (6) A1 (1982) 313-316.

[10] F. Smarandache, On Carmichaël's conjecture, Gamma, Brasov, XXIV, Anul VIII, 1986.

4.3. O generalizare a teoremei lui Euler referitoare la congruențe implicând funcția totient a lui Euler

În acest paragraf demonstrăm un rezultat care înlocuiește teorema lui Euler referitoare la congruențe:

"Dacă (a, m) = 1, atunci $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$",

în cazul când a și m nu mai sunt coprime.

& 4.3.1. Noțiuni introductive.

Presupunem m > 0. Această supoziție nu micșorează generalitatea fiindcă funcția totient a lui Euler este pară:

$\varphi(m) = \varphi(-m)$ (vezi [1])

iar congruențele au următoarea proprietate"

$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{-m}$ (vezi [1], pp. 12-3).

De asemenea, congruențele modulo zero sunt de fapt relații de egalitate. Se notează (a, b) cel mai mare divizor comun al întregilor a și b, și se alege (a, b) > 0.

Lema 4.3.1. Fie a și m numere întregi, m > 0. Există d_0, m_0 din N astfel încât $a = a_0 d_0$, $m = m_0 d_0$ și $(a_0, m_0) = 1$.

Demonstrație: este suficient să alegem $d_0 = (a, m)$. Datorită definiției cmmdc, câturile și sunt coprime (vezi [3], pp.25-6).

Lema 4.3.2. Cu notațiile din lema 4.3.1., dacă $d_0 \neq 1$ și

$d_0 = d_0^1 d_1$, $m_0 = m_1 d_1$, $(d_0^1, m_1) = 1$ și $d_1 \neq 1$,

atunci $d_0 > d_1$ și $m_0 > m_1$, și dacă $d_0 = d_1$ atunci după un număr finit de pași i obținem $d_0 > d_{i+1} = (d_i, m_i)$.

Demonstrație.

$$(0)\ \begin{cases} a = a_0 d_0 & ; \quad (a_0, m_0) = 1 \\ m = m_0 d_0 & \quad\ \ d_0 \neq 1 \end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases} d_0 = d_0^1 d_1 & ; \quad (d_0^1, m_1) = 1 \\ m_0 = m_1 d_1 & \quad\ \ d_1 \neq 1 \end{cases}$$

Din (0) și (1) se găsește că $a = a_0 d_0 = a_0 d_0^1 d_1$ deci $d_0 = d_0^1 d_1$ deci $d_0 > d_1$ și $d_0^1 \neq 1$.

Din $m_0 = m_1 d_1$ se obține $m_0 > m_1$. Dacă $d_0 = d_1$ atunci $m_0 = m_1 d_0 = k.d_0^{z}$ ($z \in \mathbb{N}^*$, $d_0 \nmid k$).

Deci

$$m_1 = k.d_0^{z-1} \ ; \ d_2 = (d_1, m_1) = (d_0, k.d_0^{z-1}).$$

După i = z pași se ajunge la $d_{i+1} = (d_0, k) < d_0$.

Lema 4.3.3. Pentru orice întreg a şi orice număr natural $m > 0$ se poate construi următoarea secvenţă de relaţii:

$$(0)\ \begin{cases} a = a_o d_o & ;\ (a_o, m_o) = 1 \\ m = m_o d_o & ;\ d_o \neq 1 \end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases} d_o = d_o^1 d_1 & ;\ (d_o^1, m_1) = 1 \\ m_o = m_1 d_1 & ;\ d_1 \neq 1 \end{cases}$$

....

$$(s-1)\ \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^{\ 1} d_{s-1} & ;\ (d_{s-2}^{\ 1}, m_{s-1}) = 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1} & ;\ d_{s-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$(s)\ \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^{\ 1} d_s & ;\ (d_{s-1}^{\ 1}, m_s) = 1 \\ m_{s-1} = m_s d_s & ;\ d_s = 1 \end{cases}$$

Demonstraţie: Această secvenţă se poate construi datorită lemei 4.3.1. Secvenţa este limitată conform lemei 4.3.2, deoarece după r_1 paşi se obţine $d_o > d_{r_1}$ şi $m_o > m_{r_1}$, iar după r_2 paşi se obţine:

$d_{r_1} > d_{r_1+r_2}$ şi $m_{r_1} > m_{r_1+r_2}$ etc.,

iar numerele m_i sunt naturale. Se ajunge la $d_s = 1$ deoarece dacă $d_s \neq 1$ atunci construim din nou un număr limitat de relaţii $(s+1), \ldots, (s+r)$, cu $d_{s+r} < d_s$.

Teorema 4.3.1. Fie $a, m \in Z$ şi $m \neq 0$. Atunci $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod m$ unde s şi m_s sunt aceiaşi ca în lemele anterioare.

Demonstraţie: Putem presupune că $m > 0$, fără a restrânge generalitatea teoremei. Din secvenţa de relaţii a lemei 4.3.3 se obţine:

$$a \overset{(0)}{=} a_o d_o \overset{(1)}{=} a_o d_o^1 d_1 \overset{(2)}{=} a_o d_o^1 d_1^1 d_2 \overset{(3)}{=} \ldots \overset{(s)}{=} a_o d_o^1 d_1^1 \ldots d_{s-1}^{\ 1} d_s$$

$$\text{şi } m \overset{(0)}{=} m_o d_o \overset{(1)}{=} m_1 d_1 d_o \overset{(2)}{=} m_2 d_2 d_1 d_o \overset{(3)}{=} \ldots \overset{(s)}{=} m_s d_s d_{s-1} \ldots d_1 d_o$$

$$\text{şi } m_s d_s d_{s-1} \ldots d_1 d_o = d_o d_1 \ldots d_{s-1} d_s m_s .$$

Din (0) avem că $d_0 = (a, m)$, iar din (i) avem $d_i = (d_{i-1}, m_{i-1})$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

$$d_o = d_o^1 d_1^1 d_2^1 \ldots\ldots\ldots\ldots d_{s-1}^{\ 1} d_s$$

$$d_1 = d_1^1 d_2^1 \ldots\ldots\ldots\ldots d_{s-1}^{\ 1} d_s$$

....

$$d_{s-1} = d_{s-1}^{\ 1} d_s$$

$$d_s = d_s$$

Deci $d_0 d_1 d_2 \dots d_{s-1} d_s = (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s (d_s)^{s+1}$

$= (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s$ deoarece $d_s = 1$.

Deci $m = (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s \cdot m_s$; deci $m_s \mid m$;

$(d_s, m_s) \overset{(s)}{=} (1, m_s) = 1$ şi $(d_{s-1}^1, m_s) \overset{(s)}{=} 1$

$1 \overset{(s-1)}{=} (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = (d_{s-2}^1, m_s d_s)$ deci $(d_{s-2}^1, m_s) = 1$

$1 \overset{(s-2)}{=} (d_{s-3}^1, m_{s-2}) = (d_{s-3}^1, m_{s-1} d_{s-1}) = (d_{s-3}^1, m_s d_s d_{s-1})$,

deci $(d_{s-3}^1, m_s) = 1$

....

$1 \overset{(i+1)}{=} (d_i^1, m_{i+1}) = (d_i^1, m_{i+2} d_{i+2}) = (d_i^1, m_{I+3} d_{i+3} d_{i+2}) = \dots =$

$= (d_i^1, m_s d_s d_{s-1} \dots d_{i+2})$ deci $(d_i^1, m_s) = 1$,

pentru orice i din $\{0, 1, 2, \dots, s-2\}$.

....

$1 \overset{(0)}{=} (a_0, m_0) = (a_0, d_1 \dots d_{s-1} d_s m_s)$ deci $(a_0, m_s) = 1$.

Acum, folosind teorema lui Euler privind congruenţele, obţinem:

$(d_i^1)^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$ pentru orice i din $\{0, 1, \dots, s\}$.

$a_0^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$

dar $a^{\varphi(m_s)} = a_0^{\varphi(m_s)} (d_0^1)^{\varphi(m_s)} (d_1^1)^{\varphi(m_s)} \dots (d_{s-1}^1)^{\varphi(m_s)}$

deci $a^{\varphi(m_s)} \equiv \underbrace{1 \dots\dots 1}_{s+1 \text{ ori}} \pmod{m_s}$

$a^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$.

$a_0^s \cdot (d_0^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} (d_2^1)^{s-3} \dots (d_{s-2}^1)^1 \cdot a^{\varphi(m_s)} \equiv$

$\equiv a_0^s \cdot (d_0^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} \dots (d_{s-2}^1)^1 \cdot 1 \pmod{m_s}$.

Înmulţim cu:

$(d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-2}^1)^{s-1} (d_{s-1}^1)^s$ şi obţinem

$a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s a^{\varphi(m_s)} \equiv a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s$

$\pmod{(d_0^1)^1 \dots (d_{s-1}^1)^s m_s}$

dar $a_0^s(d_0^1)^s(d_1^1)^s\dots(d_{s-1}^1)^s.a^{\varphi(m_s)} = a^{\varphi(m_s)+s}$ şi $a_0^s(d_0^1)^s(d_1^1)^s\dots(d_{s-1}^1)^s = a^s$ deci $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod m$, pentru orice a, m din Z $(m \neq 0)$.

Observaţii:
4.3.1. Dacă $(a, m) = 1$ atunci $d_0=1$. Deci $s = 0$, şi conform teoremei 4.3.1 avem:

$$a^{\varphi(m_0)+0} \equiv a^0 \pmod m \text{ adică } a^{\varphi(m_0)+0} \equiv 1 \pmod m.$$

Dar $m = m_0 d_0 = m_0.1 = m_0$. Deci $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$,

şi astfel obţinem, ca un caz particular, teorema lui Euler.

4.3.2. Fie a şi m doi întregi, $m \neq 0$ şi $(a, m) = d_0 \neq 1$, şi $m = m_0 d_0$. Dacă $(d_0, m_0) = 1$, atunci $a^{\varphi(m_0)+1} \equiv a \pmod m$.

Într-adevăr, din teorema 4.3.1 rezultă că $s = 1$ şi $m_1 = m_0$. Relaţia aceasta arată ca teorema lui Fermat:

$$a^{\varphi(p)+1} \equiv a \pmod p.$$

& 4.3.2. Prezentăm mai departe un algoritm de rezolvare a congruenţelor, şi o schemă logică de calculare a lui s şi m_s din teorema 4.3.1:

INTRARE: doi întregi a şi m, $m \neq 0$.
IEŞIRE: s şi m_s astfel încât $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod m$.
METODĂ:

(1) A := a,
M := m,
i := 0.
(2) Calculează d = (A, M) şi M' = M/d.
(3) Dacă d = 1, atunci S = i şi m_s = M'; stop.
Dacă $d \neq 1$, atunci A := d, M := M', i := i+1, şi mergi la pasul (2).

Corectitudinea algoritmului rezultă din lema 4.3.2 şi din teorema 4.3.1.
Vezi schema logică de mai jos. În această schema logică, PROCEDURA CMMDC calculează D = (A, M) şi alege D > 0.

& 4.3.3. Aplicaţii la rezolvarea unor probleme cu ajutorul teoremei şi algoritmului de mai înainte pentru calcularea lui s şi m_s.

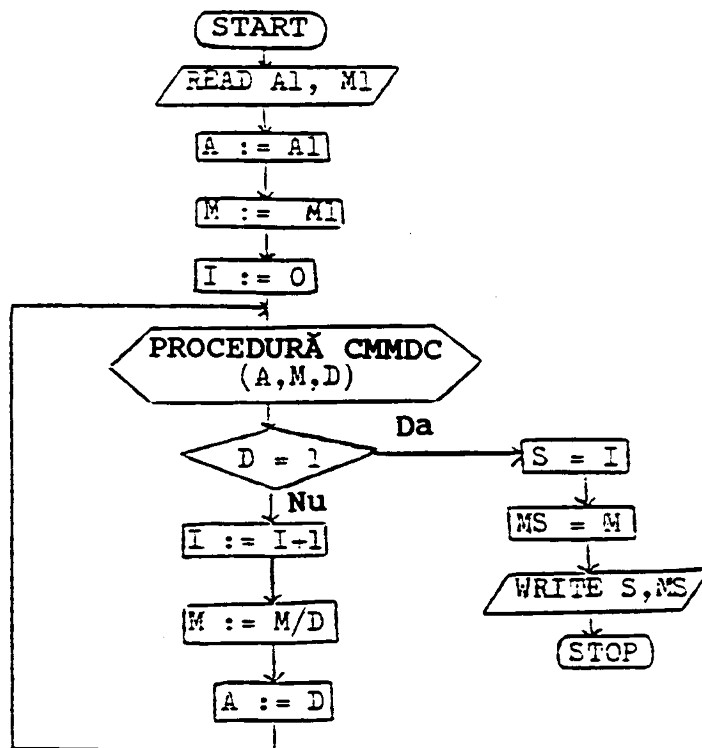
Exemplul 4.3.1. $6^{25604} \equiv ? \pmod{105765}$.
Nu se pot folosi nici teorema lui Fermat şi nici a lui Euler deoarece $(6,105765) = 3 \neq 1$.
Atunci aplicăm algoritmul de mai sus pentru a afla pe s şi m_s, şi pe urmă teorema: $d_0 = (6,105765) = 3$ $m_0 = 105765/3 = 35255$
$i = 0$; $3 \neq 1$ deci $i = 0 + 1 = 1$, $d_1 = (3,35255) = 1$, $m_1 = 35255/1 = 35255$.

Deci $6^{\varphi(35255)-1} \equiv 6^{1} \pmod{105765}$ **deci**

$6^{25604} \equiv 6^{4} \pmod{105765}$.

***

Schemă Logică:



***

Referinţe:

[1] Popovici, Constantin P. - "Teoria numerelor",Curs,Bucarest, Editura didactică si pedagogică, 1973.

[2] Popovici, Constantin P. - "Logica si teoria numerelor",Editura didactică si pedagogică, Bucarest, 1970.

[3] Creangă I, Cazacu C, Mihut P, Opait Gh, Reischer Corina - "Introducere in teoria numerelor",Editura didactică si pedagogică, Bucarest, 1965.

[4] Rusu E. - "Arithmetica si teoria numerelor",Editura didactică si pedagogică, Ediția a 2-a, Bucarest, 1963.

REFERINŢE GENERALE (în ordine cronologică):

[1] Constantin Corduneanu, abstract despre această funcţie în <Libertas Mathematica>, Texas State University, Arlington, Vol.9, 1989, 175;

[2] "Smarandache Function Journal", Number Theory Publishing Co., R. Muller Editor, Phoenix, New York, Lyon, Vol.1, No.1, 1990, ISSN 1053-4792;
Prof. Dr. V. Seleacu & Lect. Dr. C. Dumitrescu, Catedra de Matematică, Universitatea din Craiova, Romania, editori ai numerelor următoare;
înregistrată de Library of Congress (Washington, D. C., USA) la cota: QA .246 .S63;
recenzat de <Ulrich's International Periodicals Directory> (R. R. Bowker, New Providence, NJ), 1993-94, p. 3437, şi 1994-95, p.3787;
aşi <The International Directory of Little Magazines şi Small Presses> (Paradise, CA), ediţia 27, 1991, 533;
menţionat de Dr. Şerban Andronescu in <New York Spectator>, No. 39-40, Martie 1991, 51;
revista a fost recenzată de <Mathematical Reviews>, Ann Arbor, MI, 94c, Martie 1994, XXI;
şi de <Zentralblatt fur Mathematik>, Berlin, 1995;
şi <Current Mathematical Publications>, Providence, RI, USA, No. 5, Aprilie 1994;
recenzată de Constantin Corduneanu in <Libertas Mathematica>, tomus XI, 1991, 202;
menţionată în lista de periodice de la <Zentralblatt fur Mathematik> (Berlin), Vol. 730, Iunie 1992, 620;
şi recenzată de L. Tóth (Cluj-Napoca, Romania) in <Zentralblatt fur Mathematik>, Vol. 745 (11004-11007), 1992;
menţionată în <Mathematics Magazine>, Washington, D. C., Vol. 66, No. 4, Octombrie 1993, 280;
"Smarandache function", ca o noţiune separată, este citată in "Library of Congress Subject Headings", pregătit de Cataloging Policy şi Support Office, Washington, D. C., 16th Edition, Vol. IV (Q-Z), 1993, 4456;

[3] R. Muller, "A Conjecture about the Smarandache Function", Joint Mathematics Meetings, New Mexico State University, Las Cruces, NM, Aprilie 5, 1991;
şi Canadian Mathematical Society, Winter Meeting, Decembrie 9th, 1991, University of Victoria, BC;
şi The SouthWest Section of the Mathematical Association of America / The Arizona Mathematics Consortium, University of Arizona, Tucson, Aprilie 3, 1992;

[4] Sybil P. Parker, editor, <McGraw-Hill Dictionary of Scientific and Technical Terms>, New York, Scrisoare către R. Muller, Iulie 10, 1991;

[5] William H. Buje, editor, <CRC Standard Mathematical Tables

and Formulae>, The University of Akron, OH, Scrisoare către R. Muller, 1991;
[6] Prof. Dr. M. Hazewinkel, Stichting Mathematisch Centrum / Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, Netherlands, Scrisoare către R. Muller, 29 Noiembrie 1991;
[7] Anna Hodson, Senior Editor, Cambridge University Press, England, Scrisoare către R. Muller, 28 Ianuarie 1992;
[8] R. Muller, "Smarandache Function journal", notă in <Small Press Review>, Paradise, CA, Februarie 1992, Vol. 24, No. 2, p. 5; şi Martie 1993, Vol. 25, No. 3, p. 6;
[9] Pilar Caravaca, editor, <Vocabulario Científico y Técnico>, Madrid, Spain, Scrisoare către R. Muller, Martie 16, 1992;
[10 Mike Mudge, "The Smarandache Function" in <Personal Computer World>, London, England, No. 112, Iulie 1992, 420;
[11] Constantin M. Popa, Conferinţă la lansarea cărţii "America, Paradisul Diavolului / jurnal de emigrant" (Ed. Aius, dir. prof. Nicolae Marinescu, editor Ileana Petrescu, lector Florea Miu, copertă de Traian Rădulescu, postfaţă de Constantin M. Popa) de Florentin Smarandache (vezi p. 162), Biblioteca Judeţeană <Theodor Aman>, Craiova, 3 Iulie 1992;
[12] Florea Miu, "Interviul nostru", in <Cuvântul Libertăţii>, Craiova, Romania, Anul III, Nr. 668, 14 Iulie 1992, 1 & 3;
[13] Mircea Moisa, "Mişcarea Literară Paradoxistă", notă editorială în <Cuvântul Libertăţii>, Craiova, Nr. 710, 1992;
[14] John McCarthy, Mansfield, Notts, U. K., "Routines for calculating S(n)" şi Scrisoare către Mike Mudge, August 12, 1992;
[15] R. R. Bowker, Inc., Biography of <Florentin Smarandache>, in "American Men & Womem of Science", New Providence, NJ, ediţia 18, Vol. 6 (Q-S), 1992-3, 872;
[16] Jim Duncan, Liverpool, England, "PCW Numbers Count Jully 1992 - The Smarandache Function", manuscris trimis către Mike Mudge, August 29, 1992;
[17] J. Thompson, Number Theory Association, Tucson, An open problem solved (concerning the Smarandache Function) (nepublicat), Septembrie 1992;
[18] Thomas Martin, Proposed Problem concerning the Smarandache Function (nepublicat), Phoenix, Septembrie 1992;
[19] Steven Moll, editor, Grolier Inc., Danbury, CN, Scrisoare către R. Muller, 1 Octombrie 1992;
[20] Mike Mudge, "Review, Iulie 1992 / The Smarandache Function: a first visit?" in <Personal Computer World>, London, No. 117, Decembrie 1992, 412;
[21] J. Thompson, Number Theory Association, "A Property of the Smarandache Function", contributed paper, American Mathematical Society, Meeting 878, University of San Antonio, Texas, Ianuarie 15, 1993;

şi The SouthWest Section of the Mathematical Association of America, New Mexico Tech., Socorro, NM, Aprilie 16, 1993;
vezi"Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society", Providence, RI, Issue 85, Vol. 14, No. 1, 41, Ianuarie 1993;

[22] Mike Mudge, "Mike Mudge pays a return visit to the Florentin Smarandache Function" in <Personal Computer World>, London, No. 118, Februarie 1993, 403;

[23] David W. Sharpe, editor, <Mathematical Spectrum>, Sheffield, U.K., Scrisoare către Th. Martin, 12 Februarie 1993;

[24] Nigel Backhouse, Helsby, Cheshire, U. K., "Does Samma (= the Smarandache function used instead of Gamma function for sommation) exist?", Scrisoare către Mike Mudge, Februarie 18, 1993;

[25] Dr. J. R. Sutton, Mumbles, Swansea, U. K., "A BASIC PROCedure to calculate S(n) for all powers of a prime number" şi Scrisoare către Mike Mudge, Primăvara 1993;

[26] Pedro Melendez, Belo Horizonte, Brasil, Two proposed problems concerning the Smarandache Function (nepublicat), Mai 1993;

[27] Thomas Martin, Elementary Problem B-740 (folosind inversa funcţiei Smarandache), in <The Fibonacci Quarterly>, Editor: Dr. Stanley Rabinowitz, Westford, MA, Vol. 31, No. 2, p. 181, Mai 1993;

[28] Thomas Martin, Aufgabe 1075 (folosind inversa funcţiei Smarandache), in <Elemente der Mathematik>, Editors: Dr. Peter Gallin & Dr. Hans Walser, CH-8494 Bauma & CH-8500 Frauenfeld, Switzerland, Vol. 48, No. 3, 1993;

[29] I. Prodănescu, Problemă Propusă privind Funcţia Smarandache (nepublicat), Lahovari College, Rm. Vâlcea, România, Mai 1993;

[30] Lucian Tuţescu, O generalizare a Problemei propuse de I. Prodănescu (nepublicat), Lic. No. 3, Craiova, Mai 1993;

[31] T. Pedreira, Bluffton College, Ohio, "Quelques Équations Diophantiennes avec la Fonction Smarandache", abstract pentru <Theorie des Nombres et Automates>, CIRM, Marseille, France, Mai 24-8, 1993;

[32] Prof. Dr. Bernd Wegner, editor şef, <Zentralblatt für Mathematik / Mathematics Abstracts>, Berlin, Scrisori către R. Muller, 10 Iulie 1991, 7 Iunie 1993;

[33] Anne Lemarchand, éditoare, <Larousse>, Paris, France, Scrisoare către R. Muller, 14 Iunie 1993;

[34] Debra Austin, "Smarandache Function featured" in <Honeywell Pride>, Phoenix, Arizona, Iunie 22, 1993, 8;

[35] R. Muller, "Unsolved Problems related to the Smarandache Function", Number Theory Publishing Co., Phoenix, New York, Lyon, 1993;

[36] David Dillard, inginer de software, Honeywell, Inc., Phoenix, "A question about the Smarandache Function", e-mail către <SIGACT>, Iulie 14, 1993;

[37] Ian Parberry, Editor of <SIGACT News>, Denton, Texas, Scrisoare către R. Muller (aupra calculării funcţiei

Smarandache), Iulie 19, 1993;
[38] G. Fernandez, Paradise Valley Community College, "Smarandache Function as a Screen for the Prime Numbers", abstract pentru Conferinţa <Cryptography and Computational Number Theory>, North Dakota State University, Fargo, ND, Iulie 26-30, 1993;
[39] T. Yau, "Teaching the Smarandache Function to the American Competition Students", abstract pentru <Mathematica Seminar>, 1993; şi conferinţa de la American Mathematical Society, Cincinnati, Ohio, Ianuarie 14, 1994;
[40] J. Rodriguez, Sonora, Mexico, Two open problems concerning the Smarandache Function (nepublicat), August 1993;
[41] J. Thompson, Number Theory Association, "Some Limits involving the Smarandache Function", abstract, 1993;
[42] J. T. Yau, "Is there a Good Asymptotic Expression for the Smarandache Function", abstract, 1993;
[43] Dan Brown, Account Executive, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, Scrisoare către T. Yau (despre implementarea funcţiei Smarandache pe computer folosind pachetul de programe software Mathematica®), August 17, 1993;
[44] Constantin Dumitrescu, "A Brief History of the Smarandache Function" (versiune preliminară), abstract pentru <Nineteenth International Congress of the History of Science>, Zaragoza, Spain, August 21-9, 1993;
publicat sub titlul "The Smarandache Function" in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, UK, Vol. 26, No. 2, 39-40, 1993, Editor D. W. Sharpe;
de asemenea publicat in "Octogon", Braşov, Vol. 2, No. 1, Aprilie 1994, 15-6, editor M. Bencze;
[45] Florin Vasiliu, "Florentin Smarandache, le poète du point sur le i", étude introductive au volume trilingue des poèmes haiku-s <Clopotul Tăcerii / La Cloche du Silence / Silence's Bell>, de Florentin Smarandache, Editura Haiku, Bucureşti, translator Rodica Ştefănescu, Toamna 1993, 7-8 & 121 & 150;
[46] M. Marinescu, "Nume românesc în matematică", in <Universul>, Anul IX, Nr. 199, 5, Editor Aristide Buhoiu, North Hollywood, CA, August 1993;
şi "Literatura paradoxistă in-creată de Smarandache", in <Jurnalul de Dolj>, Director Sebastian Domozină, Craiova, No. 38, 1-7 Noiembrie, 1993;
[47] G. Vasile, "Apocalipsul ca formă de guvernare", in <Baricada>, Nr.37 (192), 24, Bucharest, 14 septembrie, 1993;
[48] Mike Mudge, "Review of Numbers Count - 118 - Februarie 1993: a revisit to The Florentin Smarandache Function", in <Personal Computer World>, London, No. 124, August 1993, 495;
[49] Pål Grønås, Norway, Theoretical results on both problems (0) & (V) from [13], către Mike Mudge, Vara 1993;
[50] Henry Ibstedt, Broby, Sweden, Work on the problems (0) to

(V), from [13]; câştigând premiul revistei <Personal Computer World> (concerning some open problems related to the Smarandache Function) din August 1993;
[51] Dumitru Acu, Universitatea din Sibiu, Catedra de Matematică, România, Scrisoare din 29.08.1993;
[52] Francisco Bellot Rosado, Valladolid, Spain, Scrisoare din 02.09.1993;
[53] Dr. Petre Dini, Université de Montréal, Québec, e-mail către 23-Sep-1993;
[54] Ken Tauscher, Sydney, Australia, Solved problem: To find the best bond for the Smarandache Function (nepublicat), Septembrie, 1993;
[55] A. Stuparu, Vâlcea, Problem of Number Theory (nepublicat), Octombrie 1993;
[56] M. Costewitz, Bordeaux, France, Généralisation du problème 1075 de l'<Elemente der Mathematik> (nepublicat), Octombrie 1993;
[57] G. Dincu (Drăgăşani, România), "Aritmogrif în Aritmetică" / puzzle, <Abracadabra>, Anul 2, Nr. 13, 14-5, Salinas, CA, Editor Ion Bledea, Noiembrie 1993;
[58] T. Yau, student, Pima Community College, "Alphanumerics and Solutions" (nepublicat), Octombrie 1993;
[59] Dan Fornade, "Români din Arizona", in <Luceafărul Românesc>, Anul III, Nr. 35, 14, Montréal, Canada, Noiembrie 1993;
[60] F. P. Micşan, "Români pe Mapamond", in <Europa>, Anul IV, Nr. 150, 15, 2-9 Noiembrie 1993;
[61] Valentin Verzeanu, "Florentin Smarandache", in <Clipa> Anaheim, CA, No. 117, 42, Noiembrie 12, 1993;
[62] I. Rotaru, "Cine este F.S. ?", prefaţă la jurnalul de lagăr din Turcia "Fugit ...", Ed. Tempus (director Gheorghe Stroe), Bucureşti, 1993;
[63] T. Yau, student, Pima Comunity College, Two proposed problems: one solved, another unsolved (nepublicat), Noiembrie 1993;
[64] G. Vasile, "America, America ...", in <Acuz>, Bucharest, Anul I, No. 1, 12, 8-14 Noiembrie, 1993;
[65] Arizona State University, The "Florentin Smarandache Papers" Special Collection [1979 -], procesată de Carol Moore & Marilyn Wurzburger (librarian specialists), Volume: 20 linear feet, Call #: MS SC SM-15, Locn: HAYDEN SPEC, Collections Disk 13:A:\SMARDCHE\FLRN_SMA, Tempe, AZ 85287, USA (online din Noiembrie 1993); e-mail: ICCLM@ASUACAD.BITNET, phone: (602) 965-6515;
[66] G. Fernandez, Paradise Valley Community College, "An Inequation concerning the Smarandache Function", abstract pentru Conferinţa <Mathematical Breakthroughs in the 20th Century>, State University of New York at Farmingdale, Aprilie 8-9, 1994;
[67] F. Vasiliu, "Paradoxism's Main Roots" (vezi "Introduction", 4), Xiquan Publ. House, Phoenix, Chicago, 1994;
[68] P. Melendez, Belo Horizonte, Brazil, respectiv T. Martin, Phoenix, Arizona, USA, "Problem 26.5 " [chestiunile (a),

respectiv (b) şi (c)], in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, UK, Vol. 26, No. 2, 56, 1993;

[69] Jim Duncan, "Algorithm in Lattice C to generate S(n)", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 11-2, Decembrie 1993;

[70] Jim Duncan, "Monotonic Increasing and Decreasing Sequences of S(n)", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 13-6, Decembrie 1993;

[71] Jim Duncan, "On the Conjecture $D_s^{(k)}(1) = 1$ or 0 for k>=2", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 17-8, Decembrie 1993;

[72] John C. McCarthy, "A Simple Algorithm to Calculate S(n)", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 19-31, Decembrie 1993;

[73] Pål Grønås, "A Note on $S(n^r)$", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, p. 33, Decembrie 1993;

[74] Pål Grønås, "A Proof of the Non_existence of 'Samma'", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 34-5, Decembrie 1993;

[75] John Sutton, "A BASIC PROCedure to calculate S(p^i)", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 36-7, Decembrie 1993;

[76] Henry Ibstedt, "The Florentin Smarandache Function S(n) -- programs, tables, graphs, comments", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 38-71, Decembrie 1993;

[77] Veronica Balaj, Interviu la Radio Timişoara, Noiembrie 1993; published in <Abracadabra>, Salinas, CA, Anul II, Nr. 15, 6-7, Ianuarie 1994;

[78] Gheorghe Stroe, Postface for <Fugit ... / jurnal de lagăr> (pe coperta a IV-a), Ed. Tempus, Bucharest, 1994;

[79] Peter Lucaci, "Un membru de valoare în Arizona", in <America>, Cleveland, Ohio, Anul 88, Vol. 88, No. 1, p. 6, Ianuarie 20, 1994;

[80] Debra Austin, "New Smarandache journal issued", in <Honeywell Pride>, Phoenix, Year 7, No. 1, p. 4, Ianuarie 26, 1994;

[81] Ion Pachia Tatomirescu, "Jurnalul unui emigrant în <paradisul diavolului>", in <Jurnalul de Timiş>, Timişoara, Nr. 49, p.2, 31 ianuarie - 6 februarie 1994;

[82] Dr. Nicolae Rădescu, Department of Mathematics, University of Craiova, "Teoria Numerelor", 1994;

[83] Mihail I. Vlad, "Diaspora românească / Un român se afirmă ca matematician şi scriitor în S.U.A.", in <Jurnalul de Târgovişte>, Nr. 68, 21-27 februarie 1994, p.7;

[84] Th. Marcarov, "Fugit ... / jurnal de lagăr", in <România liberă>, Bucureşti, Martie 11, 1994;

[85] Charles Ashbacher, "Review of the Smarandache Function Journal", Cedar Rapids, IA, USA, publicat in <Journal of Recreational Mathematics>, 1994;

[86] J. Rodriguez & T. Yau, "The Smarandache Function" [problem I, şi problem II, III ("Alphanumerics and solutions") respectiv], in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, United Kingdom, 1993/4, Vol. 26, No. 3, 84-5;

[87] J. Rodriguez, Problem 26.8, in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, United Kingdom, 1993/4, Vol. 26, No. 3, 91;
[88] Ion Soare, "Valori spirituale vâlcene peste hotare", in <Riviera Vâlceană>, Rm. Vâlcea, Anul III, Nr. 2 (33), Februarie 1994;
[89] Ştefan Smărăndoiu, "Miscellanea", in <Pan Matematica>, Rm. Vâlcea, Vol. 1, Nr. 1, 31;
[90] Thomas Martin, Problem L14, in <Pan Matematica>, Rm. Vâlcea, Vol. 1, Nr. 1, 22;
[91] Thomas Martin, Problems PP 20 & 21, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
[92] Ion Prodanescu, Problem PP 22, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
[93] J. Thompson, Problems PP 23, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
[94] Pedro Melendez, Problems PP 24 & 25, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
[95] Dr. C. Dumitrescu, "La Fonction de Smarandache - une nouvelle dans la théorie des nombres", Congrès International <Henry-Poincaré>, Université de Nancy 2, France, 14 - 18 Mai, 1994;
[96] C. Dumitrescu, "La Fonction de Smarandache - une nouvelle fonction dans la théorie des nombres", Congrès International <Henry-Poincaré>, Université de Nancy 2, France, 14 - 18 Mai, 1994;
[97] C. Dumitrescu, "A brief history of the <Smarandache Function>", republicat in <New Wave>, 34, 7-8, Vara 1994, Bluffton College, Ohio; Editor Teresinka Pereira;
[98] C. Dumitrescu, "A brief history of the <Smarandache Function>", republicat in <Octogon>, Braşov, Vol. 2, No. 1, 15-6, Aprilie 1994; Editor Mihaly Bencze;
[99] Magda Iancu, "Se întoarce acasă americanul / Florentin Smarandache", in <Curierul de Vâlcea>, Rm. Vâlcea, Iunie 4, 1994;
[100] I. M. Radu, Bucharest, Unsolved Problem (nepublicat);
[101] W. A. Rose, University of Cambridge, (şi Gregory Economides, University of Newcastle upon Tyne Medical School, England), Solutions to Problem 26.5 [(a), (b), (c)], in <Mathematical Spectrum>, U. K., Vol. 26, No. 4, 124-5;
[102] David E. Zitarelli, recenzie la "A brief history of the <Smarandache Function>", in <HISTORIA MATHEMATICA>, Academic Press, Inc., Harcourt Brace & Co., San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo; Vol. 21, No. 1, Februarie 1994, 102; #21.1.42;
şi in <HISTORIA MATHEMATICA>, Vol. 21, No. 2, Mai 1994, 229; #21.2.28, #21.2.29;
[103] Carol Moore, Arizona State University Library, Scrisoare către C. Dumitrescu şi V. Seleacu asupra Arhivelor Noţiunilor Smarandache, Aprilie 20, 1994;
[104] T. Yau, "Teaching the Smarandache Function to the American Competition Students", abstract, Department of Mathematics, University of Oregon, 1994;
Scrisoare de la Richard M. Koch, 6/14/94;

[105] George Fernandez, Paradise Valley Community College, "An inequation concerning the Smarandache Function", abstract, International Congress of Mathematicians (ICM 94), Zürich, 3-11 August 1994;
[106] George Miţin Vărieşescu, Sydney, Australia, abstract in "Orizonturi Albastre / Poeţi Români în Exil", Cogito Publishing House, Oradea, 1993, 89-90;
[107] Paula Shanks, <Mathematical Reviews>, Scrisoare către R. Muller, Decembrie 6, 1993;
[108] Harold W. Billings, Director of General Libraries, The University of Texas at Austin, "The Florentin Smarandche Papers (1978-1994)" Special Collection, Archives of American Mathematics, Center for American History, SRH 2.109, TX 78713, tel. (512) 495-4129, 10 linear feet;
[109] M. Andrei, I. Bălăcenoiu, C. Dumitrescu, E. Rădescu, N. Rădescu, şi V. Seleacu, "A linear combination with the Smarandache Function to obtain the identity", <Proceedings of the 26th Annual Iranian Mathematics Conference>, pp. 437-9, Kerman, Iran, Martie 28-31, 1995;
[110] I. Rotaru, "Cine este Florentin Smarandache ?", preface for "Fugit... jurnal de lagăr", p. 5, Ed. Tempus, Bucharest, 1994;
[111] Geo Stroe, postfaţă la "Fugit... jurnal de lagar", coperta IV, Ed. Tempus, Bucharest, 1994;
[112] Henry Ibstedt, "Smarandache Function Graph / The prominence of Prime Numbers", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, coperta I, Septembrie 1994;
[113] Ion Bălăcenoiu, "Smarandache Numerical Functions", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 6-13, Septembrie 1994;
[114] Pål Grønås, "The Solution of the diophantine equation $\sigma_\eta(n) = n\ (\Omega)$", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 14-6, Septembrie 1994;
[115] J. R. Sutton, "Calculating the Smarandache Function for powers of a prime (Pascal program)", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 24-26, Septembrie 1994;
[116] J. R. Sutton, "Calculating the Smarandache Function without factorising", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 27-31, Septembrie 1994;
[117] Henry Ibstedt, "An Illustration of the Distribution of the Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, 34-5, Septembrie 1994;
[118] Peter Bundschuh, Köln, "Auswertung der eingesandten Lösungen", in <Elemente der Mathematik>, Switzerland, Vol. 49, No. 3, 1994, 127-8;
şi Harald Fripertinger (Graz, Austria), Walther Janous (Innsbruck, Austria), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Joachim Klose (Bonn), Hansjurg Ladrach (Aarwangen, CH), Pieter Moree (Princeton, USA), Andreas Muller (Altendorf, CH), Werner Raffke (Vechta, Germany), Hans Schneider (Freiburg i. Br.), H.-J. Seiffert (Berlin), Michael Vowe (Therwill, CH) au rezolvat de asemenea această problemă;
[119] Gh. Tomozei, "Funcţia Smarandache", prefaţă la <Exist

împotriva mea>, poeme pre-paradoxiste de F. Smarandache, Ed. Macarie, Târgovişte, 1994, pp. 5-9;
şi in <Literatorul>, Bucureşti, Nr. 42 (159), 14-21 Octombrie 1994, p.6;

[120] Khalid Khan, London School of Economics, "Scrisoare către the Editor / The Smarandache function", in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 1, 1994/5, 20-1;

[121] Pål Grønås, Stjordal, Norway, "Scrisoare către the Editor / The Smarandache function", in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 1, 1994/5, 21;

[122] Khalid Khan, London School of Economics, Solution to Problem 26.8, in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 1, 1994/5, 22;
rezolvată şi de David Johansen şi Polly Show, Dame Allan's Girls' School, Newcastle upon Tyne, U. K.;

[123] Jane Friedman, "Smarandache in Reverse" / solution to problem B-740, in <The Fibonacci Quarterly>, USA, Noiembrie 1994, pp. 468-9;

[124] A. Stuparu, Problem H-490, in <The Fibonacci Quarterly>, Vol. 32, No. 5, Noiembrie 1994, p.473;

[125] Dumitru Ichim, Cronică in <Cuvântul Românesc>, Hamilton, Ontario, Canada, Anul 20, Nr. 221, Noiembrie 1994, p.12;

[126] Mihaly Bencze, Open Question: QQ 6, in <Octogon>, Braşov, Vol. 2, No. 1, Aprilie 1994, p.34;

[127] Pr. R. Halleux, redactor şef, <Archives Internationales d'Histoire des Sciences>, Université de Liège, Belgique, Scrisoare către R. Muller, 14 Noiembrie 1994;

[128] Marian Mirescu, "Catedrala Funcţiei Smarandache" (desen), in <Abracadabra>, Salinas, CA, Decembrie 1994, p. 20;

[129] A. D. Rachieru, " 'Avalanşa' Smarandache", in <Banatul>, Timişoara, Nr. 4, 1994;

[130] Gh. Suciu, "Spre America - Via Istambul", in <Minerva>, Bistriţa-Năsăud, Anul V, No. 39-40, p.10, Octombrie - Noiembrie 1994;

[131] Ion Radu Zăgreanu, " 'Exist împotriva mea' ", in <Minerva>, Bistriţa-Năsăud, Anul V, No. 39-40, p.10, Octombrie - Noiembrie 1994;

[132] R. Muller, editor of "Unsolved Problems related to Smarandache Function", Number Theory Publ. Co., Phoenix, 1993;
recenzat in <Mathematical Reviews>, Ann Arbor, 94m:11005, 11-06;

[133] Gh. Stroe, "Smarandache Function", in <Tempus>, Bucharest, Anul III. Nr. 2(5), Noiembrie 1994, p.4;

[134] Dr. Dumitru Acu, University of Sibiu, "Funcţia Smarandache...", in <Abracadabra>, Salinas, CA, Ianuarie 1995, No. 27, Anul III, p.20;

[135] Lucian Tuţescu, "...funcţia Smarandache...", in <Abracadabra>, Salinas, CA, Ianuarie 1995, No. 27, Anul III, p.20;

[136] Constantin M. Popa, "Funcţia...", in <Abracadabra>, Salinas, CA, Ianuarie 1995, No. 27, Anul III, p.20;

[137] Prof. M. N. Gopalan, Editor, <Bulletin of Pure & Applied

Sciences>, Bombay, India, Scrisoare către M. Andrei, Decembrie 26, 1994;

[138] Dr. Peter L. Renz, Academic Press, Cambridge, Massachusetts, Scrisoare către R. Muller, Ianuarie 11, 1995;

[139] Charles Ashbacher, recenzie la "Smarandache function Journal", in <Journal of Recreational Mathematics>, USA, Vol. 26(2), pp. 138-9, 1994;

[140] N. J. A. Sloane, S. Plouffe, B. Salvy, "The Encyclopaedia of Integer Sequences", Academic Press, San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1995, M0453 N0167;

şi online: SUPERSEEKER@RESEARCH.ATT.COM (de N. J. A. Sloane, S. Plouffe, B. Salvy, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974, USA)

prezentate ca:

"NUMERELE SMARANDACHE": S(n), pentru n = 1, 2, 3, ..., [M0453], (valorile Funcţiei Smarandache),

şi

"CÂTURILE SMARANDACHE": pentru n > 0, să se găsească cel mai mic k astfel încât nk să fie un factorial, adică S(n)/n, pentru n = 1, 2, 3, ... ;

şi in ultima versiune electronică a enciclopediei mai există alte 12 noţiuni:

"DUBLII FACTORIALI SMARANDACHE", "BAZA PĂTRATĂ SMARANDACHE", "BAZA CUBICĂ SMARANDACHE", "BAZA PRIMĂ SMARANDACHE", "SECVENŢA SIMETRICĂ SMARANDACHE", "SECVENŢA CONSECUTIVĂ SMARANDACHE", "SECVENŢA DECONSTRUCTIVĂ SMARANDACHE", "SECVENŢA OGLINDĂ SMARANDACHE", "SECVENTA PERMUTAŢIONALĂ SMARANDACHE", "SECVENŢA INVERSĂ SMARANDACHE", "CIURUL CONSECUTIV SMARANDACHE", "FUNCŢIA PSEUDO-SMARANDACHE";

[141] Editorii de la <Mathematical Reviews>, recenzia cărţii "Unsolved Problems related to Smarandache Function" de F. Smarandache, editată de R. Muller, 94m:11005;

[142] Jean-Marie De Koninck, Quebec, recenzia articolului "A function in the number theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11007, p.6940;

[143] Jean-Marie De Koninck, Quebec, recenzia articolului "Some linear equations involving a function in the number theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11008, p.6940;

[144] Armel Mercier, recenzia articolului "An infinity of unsolved problems concerning a function in the number theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11010, p.6940;

[145] Armel Mercier, recenzia articolului "Solving problems by using a function in the mnumber theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11011, p.6941;

[146] I. M. Radu, Bucharest, Scrisoare către the Editor ("The Smarandache function"), in <Mathematical Spectrum>, Sheffield University, UK, Vol. 27, No. 2, p. 43, 1994/5;

[147] Paul Erdos, Hungarian Academy of Sciences, Scrisoare către Editor ("The Smarandache function inter alia"), in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 2, pp. 43-4, 1994/5;
[148] Ion Soare, "Un scriitor al paradoxurilor: Florentin Smarandache", 114 pages, Ed. Almarom, Rm. Vâlcea, Romania, p.67, 1994;
[149] Dr. C. Dumitrescu, "Funcţia Smarandache", in <Foaie Matematică>, Chişinău, Moldova, No. 3, p. 43, 1995;
[150] D. W. Sharpe, A. Stuparu, Problem 1, in <Foaie Matematică>, Chişinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
[151] Pedro Melendez, Problem 2, in <Foaie Matematică>, Chişinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
[152] Ken Tauscher, Problem 3, in <Foaie Matematică>, Chişinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
[153] Thomas Yau, Problem 4, in <Foaie Matematică>, Chişinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
[154] Lohon, O., Buz, Maria, Biblioteca Universităţii din Craiova, Scrisoarea Nr. 499, Iulie 07, 1995.
[155] Growney, JoAnne, Bloomsburg University, PA, "The most Humanistic Mathematician: Florentin Smarandache" şi Larry Seagull, "Poem in Arithmetic Space", in <Humanistic Mathematics Network>, Harvey Mudd College, Claremont, CA, Octombrie 1995, # 12, p. 38 şi respectiv pp. 38-40;
[156] Le, Charles T., "The most paradoxist mathematician of the world", in <Bulletin of Number Theory>, Martie 1995, Vol. 3, No. 1;
[157] Seagull, Larry, Glendale Community College, "Poem in Arithmetic Space", in <Abracadabra>, Salinas, CA, August 1995, Anul III, No. 34, pp.20-1;
[158] Moore, Carol (Library Specialist), Wurzburger, Marilyn (Head of Specila Collections), Abstract, "The Florentin Smarandache papers" special collection, Call # SM SC SM-15, at Arizona State University, Tempe, AZ 85287-1006, Box 871006, Tel. (602) 965-6515, E-mail: icclmc@asuvm.inre.asu.edu , USA;
[159] Zitarelli, David, recenzie asupra articolului "A brief history of the 'Smarandache Function'", de C. Dumitrescu, in <Historia Mathematica>, Academic Press, USA, Mai 1995, Vol. 22, No. 2, p. 213, #22.2.22;
[160] Alkire, Leland G., Jr., Editor, <Periodical Title Abbreviations>, Kennedy Library, Eastern Washington University, Cheney, Washington, Scrisoare către R. Muller, Aprilie 1995;
[161] Summary of R. Muller.s "Unsolved problems related to Smarandache Function" book, in <Zentralblatt fur Mathematik>, Berlin, 1995, 804-43, 11006;
[162] Dumitrescu, C., "Funcţia Smarandache", in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, p. 976;
[163] Melendez, Pedro, Bello Horizonte, Brazil, Problemă Propusă 1, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No.

33, p. 976;
[164] Sharpe, D. W., Stuparu, A., Problemă Propusă 2, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, pp. 976-7;
[165] Rodriguez, J., Sonora, Mexico, Problemă Propusă 3, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, p. 977;
[166] Tauscher, Ken, Sydney, Australia, Problemă Propusă 4, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, p. 977;
[167] Index of <Mathematical Spectrum>, University of Sheffield, England, Vara 1995, Vol. 25-7, p. 71;
[168] Abstract privind <Smarandache Function Journal>, in <Ulrich's International Periodicals Directory>, USA, 1994-5, Mathematics 3783;
[169] Burton, Emil, <Tudor Arghezi> College, Craiova, Scrisoare din Mai 18, 1995;
[170] Fons Libris, Pretoria, South Africa, Scrisoare către Editor, Mai 1995;
[171] Sakharova, V., <Referativnyi Zhurnal>, Moscow, Russia, Scrisoare către R. Muller, Iulie 20, 1995, No. 64-645/11;

[172] Dumitrescu, C., Seleacu, V., editori, "Some notions şi questions in the number theory", Erhus Univ. Press, Glendale, Arizona, 1994;
[173] Erdos, Paul, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Scrisoare către T. Yau, Iunie 18, 1995;
[174] Lungu, Al., Bonn, Germany, Scrisoare din Aprilie 04, 1995;
[175] Vlad, Mihail I., "Nota Editorului", in <Emigrant la Infinit>, Ed. Macarie, Târgovişte, Romania, 1995;
[176] Henry Ibstedt, "Smarandache's Function S(n) Distribution for n up to 100", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, coperta I, Iunie 1995;
[177] Marcela Popescu, Paul Popescu, Vasile Seleacu, "On some numerical functions", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 3-5, Iunie 1995;
[178] I. Bălăcenoiu, V. Seleacu, "Properties of the numerical functions F_s", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 6-10, Iunie 1995;
[179] V. Seleacu, Narcisa Vîrlan, "On a limit of a sequence of a numerical function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 11-2, Iunie 1995;
[180] Emil Burton, "On some series involving the Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 13-5, Iunie 1995;
[181] I. Bălăcenoiu, V. Seleacu, "Some properties of the Smarandache Function of the type I", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 16-20, Iunie 1995;
[182] Charles Ashbacher, "Some problems on Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 21-36, Iunie 1995;
[183] I. Bălăcenoiu, M. Popescu, V. Seleacu, "Abouit the

Smarandache Square's Complementary Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 37-43, Iunie 1995;
[184] Tomiţă Tiberiu Florin, "Some remarks concerning the distribution of the Smarandache function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 44-9, Iunie 1995;
[185] E. Rădescu, N. Rădescu, C. Dumitrescu, "Some elementary algebraic considerations inspired by the Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 50-4, Iunie 1995;
[186] I. Bălăcenoiu, C. Dumitrescu, "Smarandache Functions of the Second Kind", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 55-8, Iunie 1995;
[187] M. Popescu, P. Popescu, "The problem of Lipschitz Condition", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 59-63, Iunie 1995;
[188] L. Seagull, "A generalization of a problem of Stuparu", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, p. 71, Iunie 1995;
[189] L. Seagull, "An important formula to calculate the number of primes less than x", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, p. 72, Iunie 1995;
[190] Tomikawa, Hisaya, Magalog Project Group, Tokyo, Japan, abstract despre <Smarandache Notions> journal, August 1995;
[191] Erdos, Paul, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Scrisoare către T. Yau, August 7, 1995;
[192] Hazewinkel, M., Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, Scrisoare către I. Bălăcenoiu, Iulie 4, 1995;

[193] Sloane, N. J. A., AT&T Bell Labs, Murray Hill, New Jersey, USA, njas@research.att.com, E-mails to R. Muller, Februarie - August 1995;
[194] Ashbacher, Charles, Decisionmark, Cedar Rapids, Iowa, "An Introduction to the Smarandache Function", 60 pp., Erhus University Press, Vail, Az, USA, 1995;
[195] Ecker, Michael W., Editor of <Recreational & Educational Computing>, Clarks Summit, PA, E-mail of 22-SEP-1995;
[196] Ecker, Michael W., Editor of <Recreational & Educational Computing>, Clarks Summit, PA, Două E-mail_uri din 26-SEP-1995;
[197] Andrei, M., Dumitrescu, C., Seleacu, V., Tutescu, L., Zanfir, St., "Some remarks on the Smarandache function", in <Bulletin of Pure and Applied Sciences>, Editor Prof. M. N. Gopalan, Bombay, India, Vol. 14E, No. 1, 35-40, 1995;
[198] Mudge, Michael Richard, Scrisoare către S. Abbott, The Editor of <The Mathematical Gazette>, U. K., Octombrie 7, 1995;
[199] Mudge, Michael Richard, Scrisoare către David Wells, The Author of the <Penguin Dictionary of Interesting and Curious Numbers>, U. K., Octombrie 8, 1995;
[200] Mudge, Michael Richard, "A paradoxal mathematician, his function, paradoxist geometry, and class of paradoxes",

manuscris, Octombrie 7, 1995;
[201] Mudge, Michael Richard, "A paradoxal mathematician, his function, paradoxist geometry, and class of paradoxes", manuscris, Octombrie 7, 1995;
[202] Ashbacher, Charles, Problem A, in <Personal Computer World>, London, Octombrie 1995;
[203] Radu, I. M., Problem B, in <Personal Computer World>, London, Octombrie 1995;
[204] Mudge, Mike, "The Smarandache Function revisited, plus a reader's miscellany", in <Personal Computer World>, London, Octombrie 1995;
[205] Ashbacher, Charles, "The Smarandache function-1", Scrisoare către the Editor, in <The Mathematical Spectrum>, editor D. W. Sharpe, University of Sheffield, Vol. 28, No. 1, 20, 1995/6;
[206] Seagull, L., "The Smarandache function-2", Scrisoare către Editor, in <The Mathematical Spectrum>, editor D. W. Sharpe, University of Sheffield, Vol. 28, No. 1, 20, 1995/6;
[207] Ashbacher, Charles, "The Smarandache function and the Fibonacci relationship", Scrisoare către the Editor, in <The Mathematical Spectrum>, editor D. W. Sharpe, University of Sheffield, Vol. 28, No. 1, 20, 1995/6;
[208] Ashbacher, Charles, Scrisoare către R. Muller, Octombrie 26, 1995;
[209] Muller, R., Scrisoare către Elias Toubassi, University of Arizona, Tucson, Octombrie 30, 1995;
[210] Dumitrescu, Constantin, "Solved and Unsolved Problems related to the Smarandache Function", The Second Asian Mathematics Conference (AMC '95), Nakhon Ratchasima, Thailand, Octombrie 17-20, 1995;
[211] Sandor, Jozsef, Forteni, Harghita, "On certain inequalities involving the Smarandache function", articol nepublicat;
[212] Zitarelli, David E., Scrisoare către Mario Hernandez, Noiembrie 1995;
[213] Bruckman, Paul S., Solution to problem H-490, in <The Fibonacci Quarterly>, Vol. 33, No. 5, Noiembrie 1995, pp. 476-7;
şi de asemenea M. Ballieu, A. Dujella, N. Jensen, H.-J. Seiffert, A. Stuparu;
[214] 'First International Conference on Smarandache Type Notions in Number Theory', August 21-24, 1997, organizatori: C. Dumitrescu & V. Seleacu, Dept. of Math., Univ. of Craiova, Romania
[vezi <Notices of the American Mathematical Society>, Vol. 42, No. 11, Noiembrie 1995, p. 1366];
conferinţa se desfăşoară sub auspiciile UNESCO;
[215] Radu, I.M., Problem PP60, in <Octogon>, Braşov, Vol. 3, No. 1, Aprilie 1995, p. 50;
[216] Yau, T., Problems PP66 & PP67, in <Octogon>, Braşov, Vol. 3, No. 1, Aprilie 1995, p. 51;
[217] Andrei, M., Dumitrescu, C., Seleacu, V., Tuţescu, L., Zanfir, Şt., "Some Remarks on the Smarandache Function",

in <Octogon>, Braşov, Vol. 3, No. 1, Aprilie 1995, pp. 23-7;
[218] Abbott, Steve, Farlingaye High Scool, England, Review of "The Smarandache Function Journal 4-5 (1)", in <The Mathematical Gazette>, London, Vol. 79, No. 4-86, Noiembrie 1995, p. 608;
[219] Mudge, Michael R., Dyfed, U.K., "Introducing the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions", manuscript, 11-19-1995;
[220] Mudge, Michael R., Dyfed, U.K., "The Smarandache Near-To-Primorial Function", manuscris, 11-19-1995;
[221] Mudge, Michael R., Dyfed, U.K., Scrisoare către R. Muller, 11-19-1995;
[222] Suggett, Gareth, U.K., "Primes between consecutive Smarandache numbers", lucrare nepublicată, Noiembrie 1995;
[223] Bălăcenoiu, Ion & Seleacu, Vasile, "Some properties of the Smarandache Functions of the Type I", in <Octogon>, Braşov, Vol. 3, No. 2, Octombrie 1995, pp. 27-30;
[224] Ibstedt, Henry, "Base Solution (The Smarandache Function)", Broby, Sweden, Noiembrie 30, 1995, manuscris;
[225] Faure, H., Centre de Mathematique et d'Informatique, Universite de Provence, Marseille, France, Scrisoare către C. Dumitrescu, Septembrie 19, 1995.
[226] Policarp, Gane & Stadler, Mihail, "Istoria Matematicii / Aniversările din anul 1995", in <Caiet de Informare Matematică>, Câmpina, Anul XVII, No. 34, Decembrie 1995, p. 1013;
[227] Popescu, Titu, Karlsfeld, Germany,
şi Larry Seagull, "Poem in Arithmetic Space", pp. 134-7 in cartea <Estetica Paradoxismului> (143 pages), Editura Societăţii Tempus, Bucharest, 1995;
[228] Rodriguez, J., Sonora, Mexico, Problema 5, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 4, p. 37, 1995;
[229] Melendez, P., Belo Horizonte, Brazil, Problema 6, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 4, p. 37, 1995;
[230] Yau, T., Pima Community College, Tucson, Az, Problema 7, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 4, p. 37, 1995;
[231] Seagull, L., Glendale Community College, USA, Problema 9, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 6, p. 40, 1995;
[232] Stuparu, A., Vâlcea, Romania, Problema 10, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 6, p. 40, 1995;
[233] Crudu, Dumitru, "Florentin Smarandache sau încăpăţânarea unui exilat", in <Vatra>, Tg. Mureş, Anul XXV, Nr. 295, p.92, Octombrie 1995;
[234] Bărbulescu, Radu, "Florentin Smarandache: 'Exist împotriva mea'", <Observator>, Munchen, Germania, Anul

VIII, No. 2-4 (27-9), p. 72, Martie-Decembrie 1995;
[235] Kashihara, Kenichiro, Tokyo, Japonia, E-mail_uri către R. Muller, Decembrie 1995 - Ianuarie 1996;
[236] Strazzabosco, Barbara, secretară Prof. B. Wegner, editor, <Zentralblatt fur Mathematik>, Berlin, Scrisoare către R. Muller, Octombrie 13, 1995;
[237] Kiser, Lisa A., Lock Haven University, PA, Scrisoare către Ch. Ashbacker, Cedar Rapids, IA, Decembrie 4, 1995;
[238] Tuţescu, Lucian, "Funcţia lui Smarandache -- o nouă funcţie în teoria funcţiilor", Societatea de Ştiinţe Matematice din România, <Programul manifestărilor organizate cu prilejul împlinirii a 100 ani de la apariţia primului număr al revistei 'Gazeta Matematică', 1895-1995>, Inspectoratul Şcolar al Judeţului Alba, Sala de Şedinţe a Liceului Militar 'Mihai Viteazul', Alba Iulia, Simposion, 18-20 Februarie 1995;
[239] A. Mullin, Huntsville, AL, USA, "On the Smarandache Function and the Fixed-Point Theory of Numbers", manuscris nepublicat, 1995;
[240] Corduneanu, Constantin, "Personalia", in <Libertas Mathematica>, Texas State University, Arlington, USA, Vol. XV, p. 241, 1995.

FUNCŢII PRIME ÎN TEORIA NUMERELOR

Vom construi o clasă de funcţii, definite astfel:

$$P_1 : N \to \{0, 1\},\ P_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ este prim;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

De exemplu $P_1(2) = P_1(3) = P_1(5) = \ldots = 0$,
pe când $P_1(0) = P_1(1) = P_1(4) = \ldots = 1$.

În general, pentru un întreg dat $k \geq 1$, se poate defini:

$P_k : N^k \to \{0, 1\}$,

$$P_k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n_1, n_2, \ldots, n_k \text{ sunt toate prime;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Mai departe, să studiem în ce condiţii $P_k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 0$, sau să determinăm condiţii necesare şi suficiente astfel încât n întregi, primi între ei doi câte doi, să fie simultan primi.

25 Lei